

# Analyse de sensibilité pour l'étude des paramètres influents dans les modèles d'interface pneu/sol

Rimyalegdo KIEBRE<sup>1</sup>, Floriane ANSTETT COLLIN, Michel BASSET

<sup>1</sup>Laboratoire Modélisation, Intelligence, Processus, Systèmes, Université de Haute Alsace  
ENSISA, 12 Rue des frères Lumière. 68093 Mulhouse Cedex, France.  
*rimyalegdo.kiebre@uha.fr, floriane.collin@uha.fr, michel.basset@uha.fr*

**Résumé**— Le but du papier est d'étudier les paramètres influents de deux modèles de l'interface pneu/sol, le modèle de Fiala et le modèle de Pacejka, utilisés dans les domaines automobile et aéronautique. Il s'agit de modèles non linéaires, dépendant de paramètres inconnus, à estimer. Afin de fixer au mieux le plan d'expériences, il convient de déterminer les paramètres responsables de l'incertitude sur la sortie du modèle. Pour cela, une analyse de sensibilité globale est effectuée. Elle est basée sur l'étude de la part de la variance de chaque paramètre sur la variance de la sortie. Il est ainsi montré que, dans le modèle de Fiala, les deux paramètres intervenant dans ce modèle influent de façon significative la sortie et dans le modèle de Pacejka dépendant de six paramètres, seuls deux paramètres sont influents.

**Mots-clés**— Analyse de sensibilité des paramètres, analyse de la variance, modèle non linéaire, interface pneu/sol.

## I. INTRODUCTION

Dans les domaines automobile et aéronautique, la modélisation de l'interface roue/sol est primordiale. En effet, un des éléments importants dans l'intégration d'un modèle de voiture ou d'avion est le pneumatique. Les pneus sont le seul point de contact avec le sol et la majeure partie des efforts appliqués au véhicule passe par le pneu. Dans la littérature, il existe des modèles permettant de décrire les efforts et les moments correspondant à la réaction du sol sur le pneu [1][2][3]. En général, il s'agit de modèles complexes, non linéaires, et dépendant de paramètres qui doivent être estimés à partir de données expérimentales. Souvent, peu de mesures sont disponibles car elles sont coûteuses à mettre œuvre, en particulier dans le secteur aéronautique, et les paramètres sont estimés avec une précision plus ou moins grande, entraînant une incertitude sur les efforts et les moments qui peut être parfois jugée inacceptable. En fait, parmi tous les paramètres des modèles de pneu, certains vont contribuer très peu à la variation des efforts et ne nécessiteront donc pas une détermination précise. En revanche, d'autres vont contribuer de façon significative à l'incertitude des efforts. Dans ce cas, des mesures supplémentaires peuvent être nécessaires, afin de réduire l'incertitude des paramètres et donc celle des efforts. Afin de fixer au mieux le plan d'expériences, le problème est de déterminer les paramètres dont les effets sur la sortie sont suffisamment négligeables pour qu'ils puissent être fixés à une valeur quelconque de leur intervalle d'incertitude. L'analyse de sensibilité permet de répondre à ce problème. Différentes approches permettant de tester l'analyse de sensibilité de modèles non linéaires ont été proposées dans la littérature [4][12][9][5][6][7][8][14]. On distingue les approches qualitatives [5] et les approches quantitatives [9]. Les approches qualitatives permettent d'établir une

hiérarchie au sein des paramètres en fonction de leur influence sur la variation de la sortie, mais ne permettent pas de quantifier cette influence, contrairement aux approches quantitatives. Dans la suite, on s'intéressera uniquement aux approches quantitatives. Ces dernières peuvent être locales ou globales. L'analyse de sensibilité locale se focalise sur l'impact sur la sortie de petites variations des paramètres autour d'une valeur nominale, déterminé par la dérivée partielle de la fonction de sortie par rapport aux paramètres, à cette valeur nominale [11]. L'analyse de sensibilité globale s'intéresse à l'impact sur la sortie de variations des paramètres dans la totalité de leur intervalle d'incertitude. Parmi les approches globales, on distingue celles qui sont basées sur l'analyse de la variance de la sortie [12][9][8]. Ces méthodes consistent à calculer la part de la variance de la sortie due à la variance de chaque paramètre. En fait, il existe deux types de contribution d'un paramètre à la variance de la sortie. D'une part, la contribution marginale, appelée aussi effet principal, correspond à son influence seule. D'autre part, la contribution collective correspond à l'influence due à ses interactions avec les autres paramètres. La somme des contributions marginale et collective représente l'effet total du paramètre.

Le but de ce papier est de déterminer, en effectuant une analyse de sensibilité globale, les paramètres influents dans deux modèles permettant de décrire l'interaction pneu/sol, le modèle de Fiala [1] et le modèle de Pacejka [2]. L'analyse porte sur ces deux modèles car ils ont fait l'objet d'une étude, dans le cadre d'un projet, au sein du laboratoire MIPS (Modélisation Intelligence Processus Systèmes). De plus, le modèle de Pacejka est couramment utilisé dans les secteurs automobile et aéronautique. Ces deux modèles dépendent de paramètres à estimer, tels que l'adhérence, la rigidité de glissement, ... L'objectif est de pouvoir classer les différents paramètres selon leur influence sur les efforts. Pour cela, l'analyse des variances des forces et des paramètres de chaque modèle est menée.

Ce papier est organisé comme suit. Tout d'abord, dans la Section II, les modèles d'interface pneu/sol étudiés sont présentés. Puis, la Section III décrit les indices de sensibilité utilisés ainsi qu'une technique pour les estimer. Enfin, dans la Section IV, l'analyse de la variance est menée sur les deux modèles et les paramètres influents sont mis en évidence.

## II. MODÈLES DE L'INTERFACE PNEU/SOL ÉTUDIÉS

Un pneu peut être soumis à des efforts dits longitudinaux (cas de l'accélération ou du freinage) et/ou à des efforts dits

latéraux (cas du virage). Dans cette étude, on s'attachera à ce dernier type d'effort, pour les deux modèles présentés dans cette section, le modèle de Fiala et le modèle de Pacejka. L'effort (ou force) latéral correspond à la réaction du sol sur le pneu suivant la direction transversale, lors d'une manœuvre de virage, par exemple.

Dans la suite, les données utilisées pour ces deux modèles sont issues du domaine aéronautique.

Par ailleurs, les paramètres considérés pour chaque modèle sont supposés indépendants.

### A. Modèle de Fiala

Dans le modèle de Fiala, dans le cas d'un glissement latéral pur, en régime permanent, la force latérale  $F_y$  est donnée par l'équation suivante :

$$F_y = -\mu|F_z| \left( 1 - \left( 1 - \frac{K|\tan \alpha|}{3\mu|F_z|} \right)^3 \right) \text{sgn}(\alpha) \quad (1)$$

où  $K$  est la rigidité de glissement latéral,  $F_z$  la charge verticale,  $\mu$  le coefficient de frottement latéral et  $\alpha$  l'angle de dérive, c'est-à-dire l'angle entre l'axe longitudinal de la roue et sa direction de déplacement,  $\text{sgn}(\alpha)$  représente la fonction signe de  $\alpha$ . La force latérale  $F_y$  représente la sortie du modèle. Les paramètres  $\alpha$  et  $F_z$  sont mesurés et donc considérés comme des entrées connues. Dans la suite, ils seront respectivement fixés à  $\alpha = 10^\circ$  et  $F_z = 90$  kN. Par ailleurs, les paramètres  $K$  et  $\mu$  sont inconnus. On suppose que  $K$  et  $\mu$  suivent une loi uniforme, respectivement, entre  $[179.02 \text{ kN/rad}; 1165 \text{ kN/rad}]$  et  $[0.4; 1]$ . Les bornes des intervalles de variation de ces paramètres sont issues d'une base de données existante dans le domaine aéronautique et utilisée pour estimer les paramètres lorsque peu de mesures sont disponibles.

On considère un échantillon de taille  $N = 100000$  pour chaque paramètre. Des essais avec des échantillons de taille réduite ( $N = 10000$ ,  $N = 20000$  et  $N = 50000$ ), non présentés ici, ont été réalisés, ainsi que pour le modèle de Pacejka. Ils ont montré une quasi-invariance des résultats obtenus. Néanmoins, des travaux futurs pourront s'attacher à déterminer la taille de l'échantillon requise pour obtenir le meilleur compromis entre précision des résultats et rapidité de calculs.

La figure 1 représente l'histogramme des effectifs selon les classes de la force latérale  $F_y$  et la figure 2 représente le polygone des fréquences cumulées de  $F_y$ .

La valeur moyenne de  $F_y$  est  $-54.09$  kN et son intervalle de confiance à 95% est  $[-82.75 \text{ kN}; -29.91 \text{ kN}]$ , reflétant ainsi une incertitude de  $52.84$  kN, soit 97.7%, sur la force latérale. Dans la suite, on s'attache à quantifier la contribution de  $\mu$  et celle de  $K$  à cette incertitude.

### B. Modèle de Pacejka

Le modèle de Pacejka est un modèle empirique. Dans ce modèle, dans le cas d'un glissement latéral pur, en régime permanent, la force latérale est donnée par l'expression suivante :

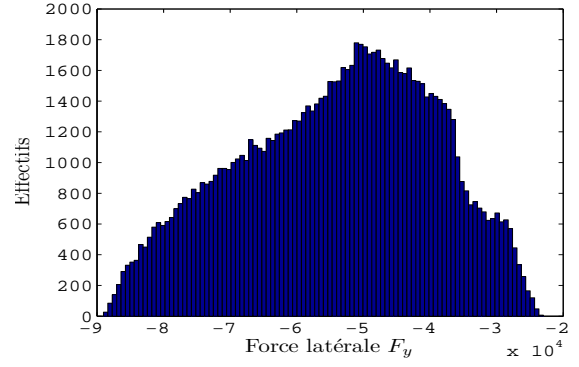


Fig. 1. Histogramme des effectifs - Modèle de Fiala

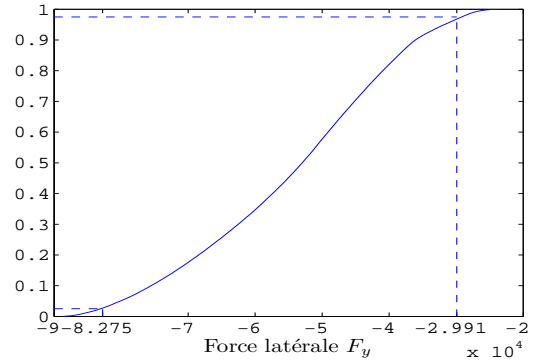


Fig. 2. Polygone des fréquences cumulées - Modèle de Fiala

$$F_y = \mu F_z \sin \left[ C \arctan \left( \frac{K}{\mu F_z C} (\alpha + S_h) - E \left( \frac{K}{\mu F_z C} (\alpha + S_h) - \arctan \left( \frac{K}{\mu F_z C} (\alpha + S_h) \right) \right) \right) \right] + S_v \quad (2)$$

Les paramètres  $C$ ,  $E$ ,  $S_h$  et  $S_v$  sont des paramètres empiriques. Comme précédemment,  $\alpha$  et  $F_z$  sont connus et sont fixés, respectivement, à  $\alpha = 10^\circ$  et  $F_z = 90$  kN. Par ailleurs,  $\mu$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $E$ ,  $S_h$  et  $S_v$  sont inconnus et donc à estimer. Ces six paramètres sont supposés suivre une loi uniforme dans les intervalles respectifs  $[0.4; 2.5]$ ,  $[1; 2]$ ,  $[-1165 \text{ kN/rad}; -179.02 \text{ kN/rad}]$ ,  $[-3; 0.5]$ ,  $[-0.0037; 0.0037]$ ,  $[-3322; 3322]$ . Du fait de la définition du modèle de Pacejka, la rigidité de glissement latéral  $K$  est de signe opposé par rapport à celui de  $K$  dans le modèle de Fiala. Comme pour le modèle de Fiala, les bornes des intervalles de variation des paramètres sont issues d'une base de données existantes dans le domaine aéronautique.

Comme précédemment, on considère un échantillon de taille  $N = 100000$  pour chaque paramètre du modèle.

La figure 3 représente l'histogramme des effectifs selon les classes de  $F_y$ . La figure 4 représente le polygone des fréquences cumulées de  $F_y$ .

La valeur moyenne de  $F_y$  est  $-85.24$  kN et son intervalle de confiance à 95% est  $[-164.3 \text{ kN}; -35.5 \text{ kN}]$ , reflétant ainsi une incertitude de  $128.8$  kN, soit 151%, sur  $F_y$ . Cette incertitude est trop élevée et il s'avère nécessaire de classer les différents paramètres selon leur contribution à cette in-

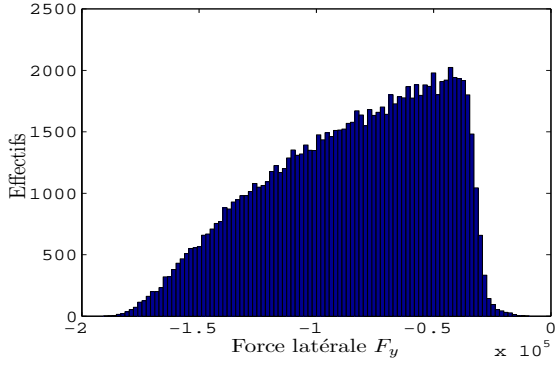


Fig. 3. Histogramme des effectifs - Modèle de Pacejka

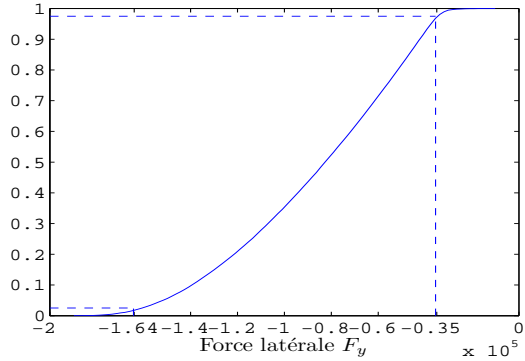


Fig. 4. Polygone des fréquences cumulées - Modèle de Pacejka

certitude.

Dans la section suivante, une approche de calcul des indices de sensibilité des paramètres, appelée approche de Sobol et basée sur la décomposition de la variance, est présentée.

### III. ANALYSE DE SENSIBILITÉ

Considérons un modèle mathématique sous la forme générale :

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \quad (3)$$

où  $y \in \mathbb{R}$  représente la sortie du modèle,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , les  $n$  paramètres inconnus. La fonction  $f$  est non linéaire en les paramètres  $x_i$ . Les paramètres  $x_i$  sont considérés comme des variables aléatoires indépendantes.

#### A. Indices de sensibilité

Afin d'apprécier la contribution du paramètre  $x_i$  à la variance de la sortie  $y$ , il convient de calculer la variance conditionnelle de  $y$  sachant  $x_i = x_i^*$ , notée  $V(y|x_i)$ . La vraie valeur  $x_i^*$  du paramètre  $x_i$  n'étant pas connue, il convient de prendre l'espérance de  $V(y|x_i)$ , pour toutes les valeurs possibles de  $x_i^*$ . Cette espérance est notée  $E(V(y|x_i))$ . Plus le paramètre  $x_i$  contribuera à la variance de  $y$ , plus la quantité  $E(V(y|x_i))$  sera petite. L'espérance  $E(V(y|x_i))$  intervient dans l'expression de la variance totale de  $y$ , notée  $V(y)$ , qui se décompose ainsi :

$$V(y) = V(E(y|x_i)) + E(V(y|x_i)) \quad (4)$$

Le terme  $V(E(y|x_i))$  est la variance de l'espérance de  $y$  conditionnellement à  $x_i$ . Ce terme représente un indicateur de la sensibilité de  $y$  à  $x_i$ . En effet, plus le paramètre  $x_i$

contribuera à la variance de  $y$ , plus la quantité  $V(E(y|x_i))$  sera élevée. Afin d'utiliser un indicateur normalisé, l'indice de sensibilité de  $y$  au paramètre  $x_i$ , noté  $S_i$ , est défini par ([17][10]) :

$$S_i = \frac{V(E(y|x_i))}{V(y)} \quad (5)$$

La valeur de l'indice de sensibilité  $S_i$  est comprise entre 0 et 1. Plus sa valeur sera proche de 1, plus le paramètre  $x_i$  contribuera à la variance de  $y$ .

La somme des  $n$  indices de sensibilité associés à chaque paramètre  $x_i$  du modèle (3) vérifie la relation :

$$\sum_{i=1}^n S_i \leq 1 \quad (6)$$

**Remarque** Si le modèle (3) est additif, il peut se réécrire sous la forme :

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (7)$$

où  $a_0$  est une constante et les fonctions  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont éventuellement non linéaires en les paramètres. Dans

le cas d'un modèle additif, on a  $\sum_{i=1}^n S_i = 1$ .

Si le modèle est non linéaire et non additif, l'interaction entre les différents paramètres va également influencer la variance de la sortie. Dans ce cas, l'indice  $S_i$  n'est plus l'indicateur approprié et on préfère l'indice de sensibilité total, noté  $S_{Ti}$  ([17][10]), et défini par :

$$S_{Ti} = 1 - \frac{V(E(y|x_{\sim i}))}{V(y)} \quad (8)$$

Le terme  $V(E(y|x_{\sim i}))$  représente la variance de l'espérance conditionnelle sachant tous les paramètres sauf  $x_i$ . L'indice de sensibilité total  $S_{Ti}$  regroupe la contribution due au paramètre  $x_i$  seul, ce qui correspond à l'indice  $S_i$ , et la contribution due à l'interaction de  $x_i$  avec les autres paramètres. Cette dernière contribution donne également lieu à des indices de sensibilité, comme expliqué ci-dessous.

Dans [12], il est montré que la variance totale de  $y$  peut se décomposer comme suit :

$$V(y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n V_{ij} + \dots + V_{12\dots n} \quad (9)$$

avec :

$$\begin{aligned} V_i &= V(E(y|x_i)) \\ V_{ij} &= V(E(y|x_i, x_j)) - V_i - V_j \\ &\vdots \end{aligned} \quad (10)$$

En divisant l'équation (9) par  $V(y)$  afin de normaliser les indicateurs, il vient :

$$1 = \sum_{i=1}^n S_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n S_{ij} + \dots + S_{12\dots n} \quad (11)$$

où  $S_i$  représente l'indice de sensibilité du paramètre  $x_i$ , c'est-à-dire sa contribution seule à  $V(y)$ . Il est aussi appelé

indice de sensibilité à l'ordre 1. Les termes  $S_{ij}$ , ...,  $S_{12\dots n}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{V_{ij}}{V(y)} \\ &\vdots \\ S_{12\dots n} &= \frac{V_{12\dots n}}{V(y)} \end{aligned} \quad (12)$$

Le terme  $S_{ij}$  représente la contribution due à l'interaction du paramètre  $x_i$  avec le paramètre  $x_j$ .  $S_{ij}$  est appelé indice de sensibilité à l'ordre 2. De même, le terme  $S_{12\dots n}$  représente la contribution due à l'interaction du paramètre  $x_i$  avec tous les autres paramètres et est appelé indice de sensibilité à l'ordre  $n$ .

L'indice de sensibilité total  $S_{T_i}$  du paramètre  $x_i$  est ainsi donné par :

$$S_{T_i} = S_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n S_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{\substack{k=j+1 \\ k \neq i}}^n S_{ijk} + \dots + S_{ijk\dots n} \quad (13)$$

Les indices de sensibilité présentés précédemment peuvent parfois être calculés de façon analytique lorsque la fonction  $f$  du modèle (3) est connue. Cependant, même dans ce cas, si les équations du modèle sont complexes et les paramètres nombreux, ce n'est pas toujours possible. Par conséquent, il est nécessaire de pouvoir estimer ces indices. Dans la suite, une technique d'estimation de la variance de  $y$  et des indices de sensibilité est décrite.

### B. Estimation des indices de sensibilité

Il existe différentes techniques d'estimation des indices de sensibilité dans la littérature [4][12][13][15][14][16]. L'approche utilisée dans ce papier est basée sur la méthode de Monte Carlo [12]. Elle présente l'avantage de pouvoir déterminer les indices de sensibilité d'ordre supérieur à 1, reflétant la contribution due aux interactions des paramètres, contrairement aux approches de McKay et FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test)[4].

Supposons que l'on dispose d'un échantillon de taille  $N$  des  $n$  paramètres du modèle (3), pris de façon aléatoire. On note  $x_i^k$  la  $k$ ème valeur du paramètre  $x_i$  issue de l'échantillon. L'estimée de l'espérance de  $y$ , notée  $\hat{E}(y)$ , est donnée par :

$$\hat{E}(y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_1^k, \dots, x_n^k) \quad (14)$$

De même, l'estimée de la variance de  $y$ , notée  $\hat{V}(y)$ , est donnée par :

$$\hat{V}(y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^2(x_1^k, \dots, x_n^k) - (\hat{E}(y))^2 \quad (15)$$

Dans [12], une estimation de la variance de  $y$  conditionnellement à  $x_i$  est proposée. Elle est basée sur l'estimation de l'espérance et nécessite deux échantillons des paramètres, afin de faire varier tous les paramètres sauf  $x_i$ .

Supposons que l'on dispose de deux échantillons de taille  $N$ . La  $k$ ème valeur du paramètre  $x_i$  issue de l'échantillon 1 est notée  $x_1^{k1}$  et celle issue de l'échantillon 2,  $x_i^{k2}$ . L'estimée de la variance de  $y$  conditionnellement à  $x_i$ , notée  $\hat{V}_i$ , est donnée par ([12]) :

$$\hat{V}_i = \hat{U}_i - (\hat{E}(y))^2 \quad (16)$$

avec  $\hat{U}_i$  donné par :

$$\begin{aligned} \hat{U}_i &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_1^{k1}, \dots, x_{i-1}^{k1}, x_i^{k1}, x_{i+1}^{k1}, \dots, x_n^{k1}) \\ &\quad \times f(x_1^{k2}, \dots, x_{i-1}^{k2}, x_i^{k1}, x_{i+1}^{k2}, \dots, x_n^{k2}) \end{aligned} \quad (17)$$

L'estimée de l'indice de sensibilité de premier ordre  $\hat{S}_i$  est alors donnée par :

$$\hat{S}_i = \frac{\hat{V}_i}{\hat{V}(y)} \quad (18)$$

Par ailleurs, l'estimée de l'indice de sensibilité d'ordre 2,  $\hat{S}_{ij}$ , est donnée par :

$$\hat{S}_{ij} = \frac{\hat{V}_{ij}}{\hat{V}(y)} \quad (19)$$

avec  $\hat{V}_{ij}$  donné par :

$$\hat{V}_{ij} = \hat{U}_{ij} - (\hat{E}(y))^2 - \hat{V}_i - \hat{V}_j \quad (20)$$

où  $\hat{U}_{ij}$  est basée sur l'estimation de l'espérance en faisant varier tous les paramètres sauf  $x_i$  et  $x_j$  :

$$\begin{aligned} \hat{U}_{ij} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dots \\ &\dots f(x_1^{k1}, \dots, x_{i-1}^{k1}, x_i^{k1}, x_{i+1}^{k1}, \dots, x_{j-1}^{k1}, x_j^{k1}, x_{j+1}^{k1}, \dots, x_n^{k1}) \\ &\quad \times f(x_1^{k2}, \dots, x_{i-1}^{k2}, x_i^{k1}, x_{i+1}^{k2}, \dots, x_{j-1}^{k2}, x_j^{k1}, x_{j+1}^{k2}, \dots, x_n^{k2}) \end{aligned} \quad (21)$$

Le même principe est appliqué pour estimer les indices d'ordre supérieur. Finalement, l'estimation de l'indice de sensibilité totale du paramètre  $x_i$  est donnée par :

$$\hat{S}_{T_i} = 1 - \frac{\hat{V}_{\sim i} - \hat{E}(y)}{\hat{V}(y)} \quad (22)$$

où  $\hat{V}_{\sim i}$  est l'estimation de la variance de  $y$  conditionnellement à tous les paramètres sauf  $x_i$ . Dans ce cas, tous les paramètres sont constants sauf  $x_i$  qui varie.  $\hat{V}_{\sim i}$  est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\sim i} &= \hat{U}_{\sim i} - (\hat{E}(y))^2 \\ \hat{U}_{\sim i} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_1^{k1}, \dots, x_{i-1}^{k1}, x_i^{k1}, x_{i+1}^{k1}, \dots, x_n^{k1}) \\ &\quad \times f(x_1^{k1}, \dots, x_{i-1}^{k1}, x_i^{k2}, x_{i+1}^{k1}, \dots, x_n^{k1}) \end{aligned} \quad (23)$$

Dans la section suivante, ces indices de sensibilité sont estimés pour les modèles de Fiala et de Pacejka.

#### IV. APPLICATIONS AUX MODÈLES D'INTERFACE PNEU/SOL

##### A. Paramètres influents dans le modèle de Fiala

Considérons le modèle de Fiala (1) décrit dans la section II-A. On s'attache à déterminer les indices de sensibilité des paramètres  $\mu$  et  $K$ . Pour cela, on considère deux échantillons de taille  $N = 100000$ , pour  $\mu$  et  $K$ .

La valeur moyenne estimée de  $F_y$  est  $\hat{E}(F_y) = -54.09\text{kN}$  (équation (14)) et sa variance estimée est  $\hat{V}(F_y) = 2.14 \times 10^8$  (équation (15)).

Les indices de sensibilité d'ordre 1,  $S_\mu$  et  $S_K$ , sont estimés par (18). De plus, l'indice d'ordre 2,  $S_{\mu K}$ , reflétant l'interaction entre  $\mu$  et  $K$ , est estimé par (19). Enfin, les indices totaux,  $S_{T\mu}$  et  $S_{TK}$  sont estimés par (22). Ces différents indices sont représentés sur la figure 5 et leurs valeurs sont données dans le tableau I.

Indice d'ordre 1	$S_\mu = 0.4205$	$S_K = 0.4969$
Indice d'ordre 2	$S_{\mu K} = 0.0827$	
Indice total	$S_{T\mu} = 0.5031$	$S_{TK} = 0.5795$

TABLE I  
VALEURS DES INDICES - MODÈLE DE FIALA

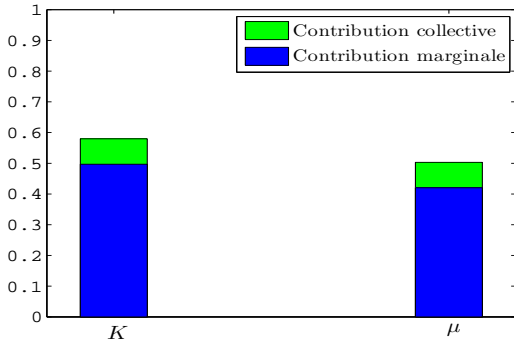


Fig. 5. Indices de sensibilité - Modèle de Fiala

L'indice de sensibilité du paramètre  $K$  est le plus élevé ( $S_K = 0.4969$ ). Par conséquent, la rigidité de glissement latéral est le paramètre le plus influent. Cependant, l'indice de sensibilité du paramètre  $\mu$  possède une valeur proche de celle de  $S_K$  ( $S_\mu = 0.4205$ ).

Dans la réalité, le paramètre  $K$  est lié à la rigidité latérale du pneu. Il détermine alors la flexion latérale du pneu et par conséquent, la force, d'où son influence aussi importante. D'autre part, le coefficient de frottement  $\mu$  est l'indicateur de l'état du contact entre le pneu et la route. Il détermine ainsi la valeur maximale que peut prendre la force  $F_y$ , ce qui explique qu'il soit également influent.

Par ailleurs, la contribution due à l'interaction entre  $\mu$  et  $K$  ( $S_{\mu K} = 0.0827$ ) est faible. De plus, la somme des indices de premier ordre est proche de 1 ( $S_\mu + S_K = 0.9174$ ), reflétant ainsi le caractère additif du modèle de Fiala.

En conclusion, dans le modèle de Fiala, l'amélioration de la précision du coefficient de frottement et de la rigidité de glissement latéral permettrait de réduire l'incertitude sur la force latérale.

##### B. Paramètres influents dans le modèle de Pacejka

Considérons le modèle de Pacejka (2) décrit dans la section II-B. On s'attache à déterminer les indices de sensibilité des paramètres  $\mu$ ,  $K$ ,  $C$ ,  $E$ ,  $S_h$  et  $S_v$ . Pour cela, on considère deux échantillons des paramètres, de taille  $N = 100000$ .

La valeur moyenne estimée de  $F_y$  est  $\hat{E}(F_y) = -85.24\text{kN}$  (équation (14)) et sa variance estimée est  $\hat{V}(F_y) = 1.3 \times 10^9$  (équation (15)).

Les indices de sensibilité à l'ordre 1,  $S_\mu$ ,  $S_K$ ,  $S_C$ ,  $S_E$ ,  $S_{S_h}$  et  $S_{S_v}$ , sont estimés par (18) et les indices totaux,  $S_{T\mu}$ ,  $S_{TK}$ ,  $S_{TC}$ ,  $S_{TE}$ ,  $S_{TS_h}$  et  $S_{TS_v}$ , par (22). Ces différents indices sont représentés sur la figure 6 et leurs valeurs sont données dans le tableau II.

Indice d'ordre 1	Indice total
$S_\mu = 0.3583$	$S_{T\mu} = 0.5216$
$S_K = 0.4659$	$S_{TK} = 0.6253$
$S_E \simeq 0$	$S_{TE} = 0.0138$
$S_C \simeq 0$	$S_{TC} = 0.0044$
$S_{S_v} \simeq 0$	$S_{TS_v} = 0.0036$
$S_{S_h} \simeq 0$	$S_{TS_h} = 0.0002$

TABLE II  
VALEURS DES INDICES - MODÈLE DE PACEJKA

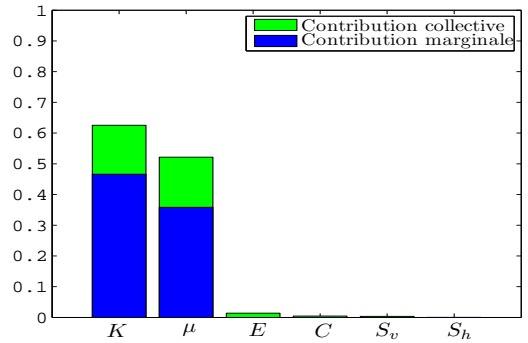


Fig. 6. Indices de sensibilité - Modèle de Pacejka

La figure 6 permet de classer les paramètres par ordre d'influence sur la variance de la force latérale  $F_y$ .

On constate que le paramètre  $K$  a l'indice de sensibilité le plus élevé ( $S_K = 0.4659$ ). Par conséquent, ce paramètre est le plus influent. Ensuite, vient le paramètre  $\mu$  ( $S_\mu = 0.3583$ ). Enfin, les paramètres  $C$ ,  $E$ ,  $S_v$  et  $S_h$  ont des indices de sensibilité proches de 0. Par conséquent, leur influence peut être considérée comme négligeable sur la force latérale et ces paramètres peuvent être fixés à la valeur

moyenne de leur intervalle d'incertitude sans modifier significativement la force latérale.

Les mêmes remarques que celles pour le modèle de Fiala, expliquant l'influence des paramètres  $\mu$  et  $K$ , peuvent être formulées. De plus, les paramètres  $C$ ,  $E$ ,  $S_v$  et  $S_h$  sont des paramètres de recalage permettant d'ajuster la forme de la courbe de la force  $F_y$  ou de réduire l'erreur d'interpolation, d'où leur influence individuelle négligeable.

Par ailleurs, la somme des indices de sensibilité des six paramètres vaut 0.8242. Cette valeur est relativement proche de 1. Le modèle de Pacejka possède alors un comportement proche de celui correspondant à un modèle additif.

En conclusion, dans le modèle de Pacejka, seuls les paramètres  $\mu$  et  $K$  sont influents sur la force latérale, sur les six paramètres intervenant dans ce modèle. Par conséquent, l'amélioration de la précision du coefficient de frottement latéral et de celle de la rigidité de glissement latéral permettrait de réduire considérablement l'incertitude de la force latérale.

## V. CONCLUSION

L'analyse de sensibilité globale de deux modèles permettant de décrire l'interface pneu/sol, modèle de Fiala et modèle de Pacejka, utilisés dans les domaines automobile et aéronautique, a été réalisée. Cette analyse de sensibilité est basée sur l'étude de la part de la variance de la sortie des modèles due à la variance de chaque paramètre. Les données utilisées sont issues du domaine aéronautique.

Pour le modèle de Fiala, la force latérale dépend de deux paramètres, le coefficient de frottement latéral et la rigidité de glissement latéral. Il a été montré que les deux paramètres sont autant influents sur la force latérale.

Par ailleurs, pour le modèle de Pacejka, la force latérale dépend de six paramètres. Cependant, uniquement le coefficient de frottement latéral et la rigidité de glissement latéral sont influents sur la force latérale. L'amélioration de la précision de ces deux paramètres permettrait de réduire considérablement les incertitudes sur la force latérale, les autres paramètres pouvant être fixés à leur valeur moyenne.

Les deux modèles étudiés font intervenir des paramètres qui ont été supposés indépendants. Cependant, il existe d'autres modèles de l'interface pneu/sol dans la littérature dont l'expression des forces fait intervenir des paramètres qui peuvent être corrélés. Par conséquent, des travaux futurs porteront sur l'analyse de sensibilité de paramètres corrélés.

Par ailleurs, il serait intéressant de comparer les résultats obtenus avec ceux qui seraient obtenus par d'autres techniques d'analyse de sensibilité (McKay, FAST, ...), des points de vue de la convergence des indices de sensibilité et du temps de calcul de ces indices.

## RÉFÉRENCES

- [1] Blundell M. et Harty D. *Multibody systems approach to vehicle dynamics*. Elsevier, 2004.
- [2] Pacejka H. B. *Tyre and Vehicle Dynamics*. Elsevier, 2006.
- [3] Rajamani R. *Vehicle dynamics and control*. Springer, 2005.
- [4] Cukier R.I., Levine R.I. et Shuler K.E. Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems, *Journal Computational Physics*, vol. 26, pp. 1-42, 1978.
- [5] Saltelli A., Chan K. et Scott E.M. *Sensitivity Analysis*. John Wiley and Sons, Chichester, 2000.
- [6] Frey H. C. et Patil S. R. Identification and review of sensitivity analysis methods. *Risk analysis*, vol. 22, n°3, pp. 553-578, 2002.
- [7] Saltelli A. Sensitivity analysis for importance assessment. *Risk Analysis*, vol. 22, n°3, 2002.
- [8] Saltelli A., Tarantola S., Campolongo F. et Ratto M. *Sensitivity analysis in practice*. John Wiley and Sons, Chichester, 2004.
- [9] Saltelli A., Tarantola S. et Chan K. A quantitative model independent method for global sensitivity analysis of model output. *Technometrics*, vol. 41, pp. 39-56, 1999.
- [10] Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D. Saisana M. et Tarantola S. *Global sensitivity analysis, The Primer*. John Wiley and Sons, 2008.
- [11] Turanyi T. et Rabitz H. Local methods in *Sensitivity analysis*, eds : Saltelli A., Chan K., Scott E. M. John Wiley and Sons, Chichester, 2000.
- [12] Sobol I. M. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, vol. 1, pp. 407-414, 1993.
- [13] McKay M. D., Morrison J. D. et Upton S. C. Evaluating prediction uncertainty in simulation models. *Computer Physics Communications*, vol. 117, n°1-2, pp. 44-51, 1999.
- [14] Jacques J. Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée. Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fournier - Grenoble I, 05 décembre 2005.
- [15] Schwieger V. Variance-based sensitivity analysis for model evaluation in engineering surveys. *Proceedings of 3rd International Conference on Engineering Surveying*, Bratislava, Slovaquie, 11-13 novembre 2004.
- [16] Mara T.A et Tarantola S. Application of global sensitivity analysis of model output to building thermal simulations. *Journal of Building Simulation*, vol. 1, pp. 290-302, 2008.
- [17] Archer G. E. B., Saltelli A. et Sobol I. M. Sensitivity measures, Anova-like techniques and the use of bootstrap. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, vol. 58, pp. 99-120, 1997.