

Contrôle des échangeurs de chaleur : application au circuit de refroidissement d'un système pile à combustible

Fehd BENAICHA¹, Karim BENCHERIF¹, Michel SORINE², Jean Claude VIVALDA³

¹ Renault, Direction de la Mécanique
67 rue des Bons-Raisins F-92508 RUEIL-MALMAISON CEDEX

² Inria-Rocquencourt
Domaine de Voluceau, 78153 Rocquencourt, France

³ Inria-Nancy Grand Est
Université de Metz-Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01, France

feh.d.ben-aicha@renault.com, karim.ben-cherif@renault.com, michel.sorine@inria.fr,
jean-claude.vivada@inria.fr

Résumé—Les échangeurs de chaleur sont des composants fréquemment utilisés dans les systèmes de refroidissement. Ils représentent des éléments clé de la maîtrise de l'énergie des procédés et des systèmes industriels (recirculation des gaz EGR dans les circuits haute et basse pressions des moteurs thermiques, confort thermique, refroidissement des machines électriques et des systèmes avec piles à combustibles). Dans cet article, nous présentons un exemple d'application pour un système pile à combustible avec reformeur embarqué, où les contraintes thermiques sont sévères et nécessitent un contrôle performant des échangeurs de chaleur. La démarche suivie peut être réutilisée pour des circuits de refroidissement conventionnel sur véhicule équipé de GMP thermique.

Tout d'abord, nous présentons un modèle 0D pour la commande d'un échangeur de chaleur. Nous proposons ensuite une commande non-linéaire de ce système. Les performances de cette commande sont comparées à un contrôleur classique de type PI. Nous proposons également un observateur des états non mesurés de l'échangeur dans une optique de réduction du nombre de capteurs ou de diagnostic.

Mots-clés—Echangeur de chaleur, Représentation d'état bilinéaire, Stabilisation par fonction de Lyapunov, Commande non-linéaire, Observateur non-linéaire, Observateur grand-gain, Principe de séparation.

I. INTRODUCTION

Afin d'optimiser le rendement d'un système groupe moto-propulseur avec pile à combustible tout en respectant les contraintes technologiques des organes, la commande du circuit de refroidissement doit répondre à trois objectifs :

- Protéger la pile. La température de la partie solide de la pile ne doit pas dépasser 100°C et l'écart entre la température des gaz en entrée de la pile et celle de la pile doit être inférieure à 10°C .
- Optimiser le bon fonctionnement de la pile. Pour cela la température de la pile T_s doit être asservie à une consigne T_1^{cons} variable avec une précision est de 2°C . Les températures des gaz en entrée de la pile doivent être asservies à la température d'eau en sortie pile avec une précision en statique inférieure à 5°C .
- Assurer le bilan un bilan d'eau positif. Cet objectif devient prioritaire lorsque le volume d'eau stocké descend au dessous d'un seuil limite.

Les échangeurs de chaleur constituent les principaux organes du circuit de refroidissement. Les échangeurs utilisés sont des échangeurs à plaques qui peuvent être utilisés pour réguler la température des gaz et des liquides. Dans cet article nous proposons un contrôle performant des échangeurs, ce qui peut être intéressant pour les applications avec des contraintes thermiques sévères. C'est le cas par exemple du système pile à combustible avec Reformeur embarqué [1] et [2].

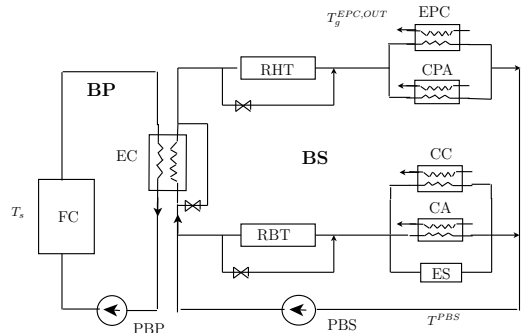


Fig. 1. Circuit de refroidissement d'un système pile à combustible

PBS et PBP sont des pompes, RHT et RBT sont des radiateur, FC désigne la pile et EC, EPC, CPA, CC et CA sont des échangeurs de chaleur.

II. MODÉLISATION D'UN ÉCHANGEUR DE CHALEUR

A. Rappel des équations

La littérature sur les échangeurs de chaleur est abondante. On peut citer [3], [4], [5] et [6]. Dans cet article nous nous basons sur le modèle de l'échangeur à plaques développé dans [7]. Ce modèle est obtenu à partir des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie et à partir des équations d'état des fluides. Ces équations aux dérivées partielles prennent en compte les principaux phénomènes physico-

chimiques : la diffusion, le transport des gaz, les réactions chimiques, les changements d'état des gaz et les réactions électrochimiques. Un modèle 0D réduit est ensuite proposé. Ce modèle a été validé grâce aux essais expérimentaux effectués sur des banc montés à l'université de Liège. Les résultats de validation sont présentés dans [7].

B. Synthèse d'un modèle de l'échangeur de chaleur

Dans ce qui suit, la variable T désigne la température, Q le débit, A, L sont des paramètres géométrique, N est le nombre de plaques et m, ρ, C_p dénotent des caractéristiques physiques des solides et des fluides. Les indices c, g et s indiquent qu'il s'agit de liquide de refroidissement, de gaz ou de la partie solide. La représentation d'état de l'échangeur s'écrit :

Équations d'état

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{T} + u\mathbf{B}\mathbf{T} + u\mathbf{b} + \mathbf{r} \quad (1)$$

Équations de sortie

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\text{out}} &= \mathbf{C}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{\text{in}} \\ Q_v^{\text{out}} &= f_v(Q_v^{\text{in}}, P_g^{\text{in}}, T_g^{\text{in}}, T_g) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} T_g \\ T_c \\ T_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{\text{out}} = \begin{pmatrix} T_g^{\text{out}} \\ T_c^{\text{out}} \end{pmatrix} \\ \mathbf{T}^{\text{in}} &= \begin{pmatrix} T_g^{\text{in}} \\ T_c^{\text{in}} \end{pmatrix}, \quad u = Q_c, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{N_c^{\text{pl}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2T_c^{\text{in}}}{\rho_c A_c L} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{N_g^{\text{pl}}} \begin{pmatrix} \frac{2Q_g T_g^{\text{in}}}{\rho_g A_g L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{2Q_g C_{p_g} + K_g S N_g^{\text{pl}}}{N_g^{\text{pl}} \rho_g A_g L C_{p_g}} & 0 & \frac{K_g S}{\rho_g A_g L C_{p_g}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_g S}{m_s C_{p_s}} & 0 & -\frac{K_g S}{m_s C_{p_s}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{N_c^{\text{pl}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{p_c} + \alpha_E S}{\rho_c A_c L C_{p_c}} & \frac{\alpha_E S}{\rho_c A_c L C_{p_c}} \\ 0 & \frac{\alpha_E S}{m_s C_{p_s}} & -\frac{\alpha_E S}{m_s C_{p_s}} \end{pmatrix}$$

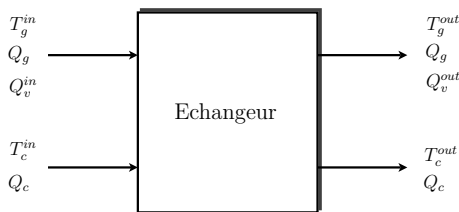


Fig. 2. Modèle d'un échangeur

C. Ecriture matricielle du modèle de l'échangeur

Notons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$b = (0, b_2, 0)^T, \quad r = (r_1, 0, 0)^T$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = T, \quad w = T^{\text{in}}$$

Nous allons donc étudier le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + u(Bx + b) + r \\ y &= Cx + w \end{aligned} \quad (2)$$

Dans ce qui suit, on suppose que l'on connaît parfaitement les vecteurs r et w .

III. RÉGULATION DE L'ÉCHANGEUR

A. Cahier des charges

Le but du contrôle des échangeurs EPC, CPA, CC et CA est d'asservir la température des gaz en sortie à une température cible donnée T_2^{cons} . L'objectif du contrôle de l'échangeur EC est d'asservir la température de l'eau glycolée en sortie à une température cible donnée $T_{e,2}^{\text{cons}}$. Pour cela, nous considérons que le débit du liquide de refroidissement en entrée de l'échangeur est une variable de commande $u = Q_c$. Cette dernière doit assurer une erreur statique nulle ainsi qu'un débit de commande qui varie entre Q_c^{min} et Q_c^{max} . Le dépassement doit être le plus faible possible avec un temps de réponse de la température de la pile qui n'excédant pas les 100s. L'asservissement des températures des gaz doit être suffisamment rapide afin de minimiser l'impact du temps de réponse sur le contrôle de la température de la pile.

Dans un premier temps, nous supposons que tous les états de l'échangeur sont observables, nous allons développer une loi de commande non-linéaire de l'échangeur de chaleur en nous inspirant des travaux de Jean Paul Gauthier sur la commande des systèmes bilinéaires [8]. Nous allons par la suite développer un observateur d'état en nous inspirant des travaux sur le développement d'un observateur d'un bioréacteur [9].

B. Les points singuliers

Nous allons voir d'abord quels sont les points singuliers potentiels. On cherche les points x^e pour lesquels il existe une valeur u^e du contrôle pour laquelle on a $Ax^e + u^e(Bx^e + b) + r = 0$, c'est à dire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1^e + a_{13}x_3^e + r_1 = 0 \\ u^e(b_{22}x_2^e + b_{23}x_3^e + b_2) = 0 \\ a_{13}x_1^e + a_{33}x_3^e + u^e(b_{32}x_2^e + b_{33}x_3^e) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Nous considérons que la commande u^e est strictement positive, le système (3) est un système d'inconnues x_1^e, x_2^e et x_3^e , son déterminant est

$$(u^e)^2 a_{11}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) + u^e b_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})$$

qui est toujours négatif, par conséquent, le système (3) admet une unique solution. Le choix de u^e fixe donc le point d'équilibre. Inversement, se fixer le point d'équilibre (on peut fixer

arbitrairement l'une des trois coordonnées x_1^e , x_2^e ou x_3^e) fixe la valeur de u^e .

Pour étudier notre système au voisinage du point d'équilibre choisi, on pose $\bar{x} = x - x^e$, $\bar{u} = u - u^e$. Le système (2) se réécrit :

$$\dot{\bar{x}} = (A + u^e B)\bar{x} + \bar{u}(B\bar{x} + Bx^e + b) \quad (4)$$

C. Stabilisation du système augmenté avec action intégrale

On peut remarquer que la matrice $A + u^e B$ est presque symétrique, en fait le calcul

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} (A + u^e B) \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & (\lambda_1/\lambda_3)a_{13} \\ 0 & u^e b_{22} & (\lambda_2/\lambda_3)u^e b_{23} \\ (\lambda_3/\lambda_1)a_{31} & (\lambda_3/\lambda_1)u^e b_{23} & a_{33} + u^e b_{33} \end{pmatrix}$$

montre que la matrice $A + u^e B$ est semblable à une matrice symétrique : il suffit de choisir $\lambda_1 = \sqrt{\frac{a_{31}}{a_{13}}}$, $\lambda_2 = \sqrt{\frac{b_{32}}{b_{23}}}$ et $\lambda_3 = 1$. Nous notons \tilde{A} cette matrice symétrique :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \sqrt{a_{31}a_{13}} \\ 0 & u^e b_{22} & u^e \sqrt{b_{32}b_{23}} \\ \sqrt{a_{31}a_{13}} & u^e \sqrt{b_{32}b_{23}} & a_{33} + u^e b_{33} \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que la matrice \tilde{A} est définie négative, on voit donc que, une fois une consigne choisie, la dérive du système est asymptotiquement stable. Une fonction de Lyapunov candidate pour le système (4) sera donc $\bar{x}^T Q \bar{x}$ avec $Q = -L^2(A + u^e B)$ (L est la matrice diagonale d'éléments diagonaux λ_1 , λ_2 et λ_3). On peut aussi rajouter un feedback en prenant $\bar{u}(\bar{x}) = -\bar{x}^T Q (B\bar{x} + Bx^e + b)$.

Dans l'équation (4), les variables observées sont $y_1 = 2\bar{x}_1 + w_1$ et $y_2 = 2\bar{x}_2 + w_2$. Nous introduisons l'intégrale de l'erreur de régulation $z = \int (y_1 - T_2^{cons}) dt$, avec ces nouvelles variables, on obtient le système augmenté :

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + u^e B & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ z \end{pmatrix} + \bar{u} \left[\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Bx^e \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (5)$$

où D est la matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le linéarisé de ce système au voisinage du point d'équilibre $(\bar{x}, z) = (0, 0)$ et $u = 0$ est représenté par la paire

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_e & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

où on a noté $A_e = A + u^e B$ et $\tilde{b} = Bx^e + b$.

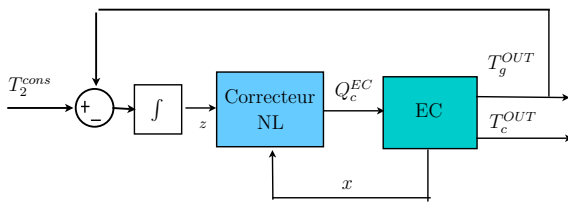


Fig. 3. Commande de l'échangeur avec action intégrale

La figure 3 nous montre la structure de la loi de commande utilisée. Nous cherchons à déterminer la commande $\bar{u}(\bar{x}, z)$ qui permet de stabiliser le système augmenté (5).

La partie non contrôlée de ce système est représentée par une matrice qui n'a plus toutes ses valeurs propres strictement négatives, néanmoins elle est dissipative pour le produit scalaire dont la matrice est

$$P = \begin{pmatrix} L^2 + (A_e^T)^{-1} D^T D A_e^{-1} & -(A_e^T)^{-1} D^T \\ -D A_e^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

avec L est la matrice $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} (\bar{x}^T, z) P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ z \end{pmatrix} &= \bar{x}^T L^2 A_e \bar{x} \\ &= (L\bar{x})^T L A_e L^{-1} (L\bar{x}) \leq 0 \end{aligned}$$

Considérons la fonction de Lyapunov quadratique définie par la matrice P

$$V(\bar{x}, z) = (\bar{x}^T, z) P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ z \end{pmatrix}$$

et prenons pour feedback l'opposé de la dérivée de V le long du champ de vecteurs contrôlé :

$$\bar{u}_S(\bar{x}, z) = -(\bar{x}^T P_{11} + z P_{21})(B\bar{x} + Bx^e + b)$$

où $P_{11} = L^2 + (A_e^T)^{-1} D^T D A_e^{-1}$ et $P_{21} = -D A_e^{-1}$. Avec ce feedback, la dérivée de la fonction V le long des trajectoires du système (5) est

$$\dot{V}(\bar{x}, z) = (L\bar{x}^T) L A_e L^{-1} (L^{-1} \bar{x}) - [(\bar{x}^T P_{11} + z P_{21})(B\bar{x} + Bx^e + b)]^2.$$

La fonction \dot{V} , somme de deux expressions négatives, s'annule si et seulement si $\bar{x} = 0$ et $z P_{21}(Bx^e + b) = 0$, ce qui équivaut à $(\bar{x}, z) = (0, 0)$ si $P_{21}(Bx^e + b) \neq 0$; dans ce cas le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable et même localement exponentiellement stable. Naturellement, le feedback stabilisateur peut être rendu arbitrairement petit en divisant u_s par $1 + K(\|\bar{x}\|^2 + z^2)$. La commande u de l'échangeur s'écrit alors :

$$u = u_e - \frac{1}{1 + K(\|\bar{x}\|^2 + z^2)} (\bar{x}^T P_{11} + z P_{21})(B\bar{x} + Bx^e + b)$$

D. Résultats et analyses

Si le modèle décrit parfaitement le comportement de l'échangeur, la loi de commande $u = u_e$ permet d'avoir une erreur statique nulle. En réalité, un biais réside entre les variables modélisées et les valeurs réelles associées, ceci peut être dû au vieillissement des composants ou bien à la modification des caractéristiques du système modélisé. En plus, l'échangeur commandé par la loi $u = u_e$ présente des transitoires avec des dynamiques variables (aspect bilinéaire du système).

L'ajout de l'action intégrale permet de pallier à ce problème et d'avoir une convergence exponentielle vers la réponse désirée, tel qu'il est illustré dans la figure 4.

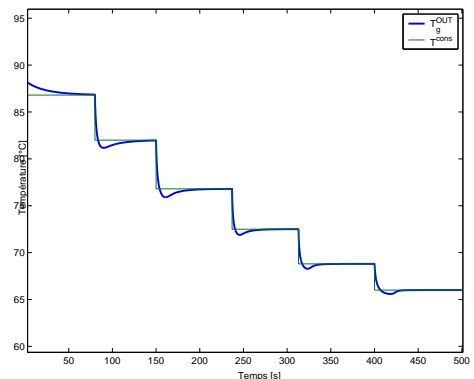


Fig. 4. Température des gaz en sortie de l'échangeur, commande nonlinéaire

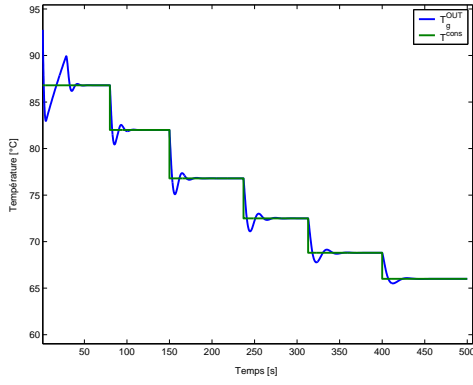


Fig. 5. Température des gaz en sortie de l'échangeur, commande PI

Les figures 4 et 5, montre une comparaison entre la commande bilinéaire et la commande à base de PI. La méthode utilisée pour le réglage du PI est la méthode de Ziegler et Nichols [10]. Nous pouvons remarquer que la commande bilinéaire s'adapte avec le point de fonctionnement du système alors que les performances de la commande PI classique se dégradent lorsqu'on s'éloigne du point autour du quel le réglage des gains K_P et K_I a été fait

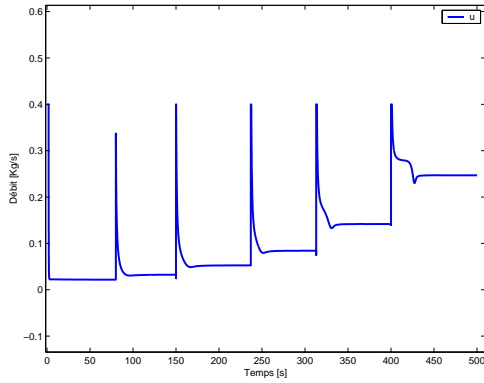


Fig. 6. Débit de l'eau glycolée, commande nonlinéaire

IV. OBSERVATEUR

A. Développement de l'observateur

L'une des trois températures n'étant pas mesurée, nous allons concevoir un observateur; pour cela bien que nous ayons affaire à un système avec 2 sorties, nous allons nous inspirer de la technique utilisée par J.-P.Gauthier et *al* pour leur observateur mono-sortie. Considérons le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + u(Bx + b) + r & x \in \mathbf{R}_+^3 \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned} \quad (6)$$

Supposons que l'état x_2 est mesuré et considérons le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= a_{11}x_1 + a_{13}x_3 + r_1 \\ z_3 &= x_2 \end{aligned}$$

Le système (6) se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 - 2\theta(\hat{z}_1 - z_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 &= (a_{13}a_{31} - a_{33}a_{11})\hat{z}_1 + (a_{11} + a_{33})\hat{z}_2 - a_{33}v_1 \\ &\quad + u(-a_{11}b_{33}\hat{z}_1 + b_{33}\hat{z}_2 + a_{13}b_{32}z_3 - b_{33}v_1) - \theta^2(\hat{z}_1 - z_1) \\ \dot{\hat{z}}_3 &= u\left(-\frac{a_{11}b_{23}}{a_{13}}z_1 + \frac{b_{23}}{a_{13}}\hat{z}_2 + b_{22}z_3 - \frac{b_{23}}{a_{13}}v_1 + b_2\right) - \theta^5(\hat{z}_3 - z_3) \end{aligned} \quad (7)$$

Nous posons $\epsilon_i = \hat{z}_i - z_i$, l'équation d'erreur s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_2 - 2\theta\epsilon_1 \\ \dot{\epsilon}_2 &= (a_{13}a_{31} - a_{33}a_{11} - \theta^2)\epsilon_1 + (a_{11} + a_{33})\epsilon_2 \\ &\quad + u(-a_{11}b_{33}\epsilon_1 + b_{33}\epsilon_2) \\ \dot{\epsilon}_3 &= u\frac{b_{23}}{a_{13}}\epsilon_2 - \theta^5\epsilon_3 \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que, si θ et α sont choisis assez grands (en valeur absolue), l'erreur converge exponentiellement vers 0 (à condition, bien sûr, que le contrôle u soit borné). Pour cela, nous allons considérer la fonction de Lyapunov :

$$\begin{aligned} V(\epsilon) &= \epsilon' S_\infty(\theta)\epsilon \\ &= \underbrace{\frac{1}{\theta}\epsilon_1^2 - \frac{2}{\theta^2}\epsilon_1\epsilon_2 + \frac{2}{\theta^3}\epsilon_2^2 + \frac{1}{\theta^5}\epsilon_3^2}_{V_1(\epsilon_1, \epsilon_2)} \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction V le long des trajectoires du système (7) est égale à :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\epsilon) &= \dot{V}_1(\epsilon_1, \epsilon_2) + 2u\frac{b_{23}}{a_{31}}\epsilon_2\epsilon_3 - 2\theta^5\epsilon_3^2 \\ &\leq -\theta V_1(\epsilon_1, \epsilon_2)/2 + 2u\frac{b_{23}}{a_{31}}\epsilon_2\epsilon_3 - 2\theta^5\epsilon_3^2 \end{aligned}$$

La matrice de cette expression considérée comme une forme quadratique en ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 est :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\theta} & 0 \\ \frac{1}{2\theta} & \frac{1}{\theta^2} & \frac{b_{23}}{a_{31}}u \\ 0 & \frac{b_{23}}{a_{31}}u & -2\theta^5 \end{pmatrix}$$

et il est facile de voir que les déterminants principaux de l'opposé de cette matrice sont tous strictement positifs si θ est choisi assez grand.

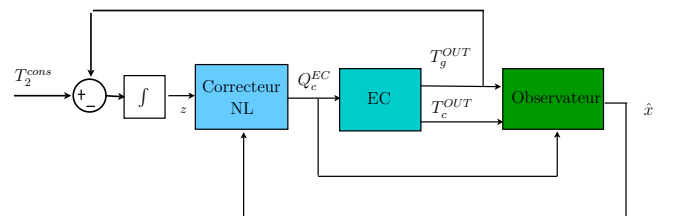


Fig. 7. Commande de l'échangeur avec action intégrale

Les figures 8 et 9 représentent les résultats que donne cet estimateur pour deux valeurs différentes de θ . Dans les deux cas les paramètres de l'estimateur sont dispersés par rapport à ceux du modèle.

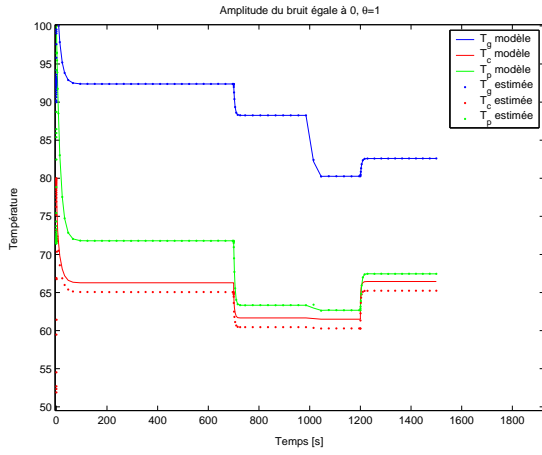


Fig. 8. Reconstitution des états du modèle de l'échangeur, $\theta = 1$

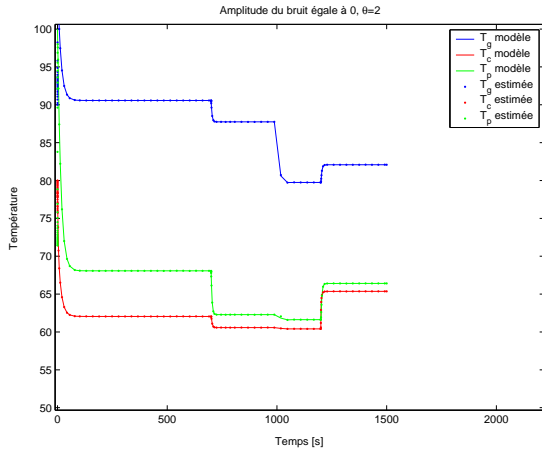


Fig. 9. Reconstitution des états du modèle de l'échangeur, $\theta = 2$

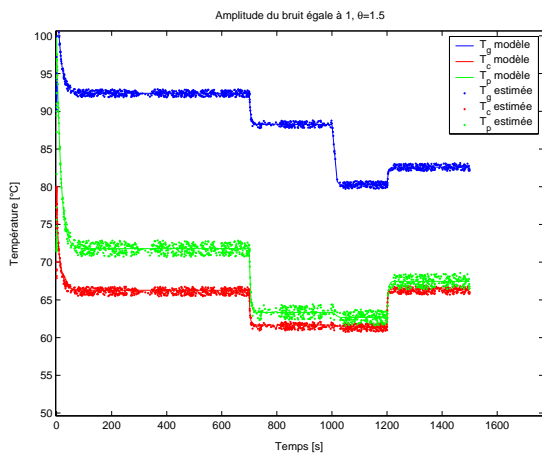


Fig. 10. Reconstitution des états du modèle de l'échangeur en présence de bruit de mesure, $\theta = 1, 5$

Les entrées sont le débit d'eau glycolée et les températures à l'entrée de l'échangeur (figures 11 et 12).

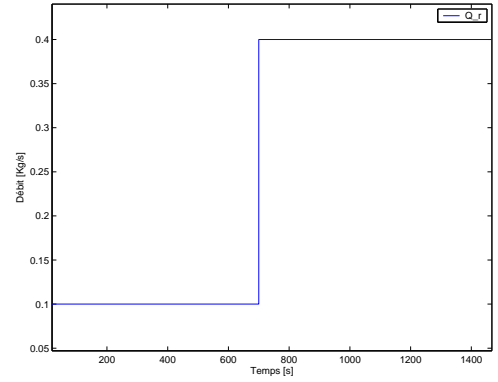


Fig. 11. Le débit d'eau glycolée à l'entrée de l'échangeur

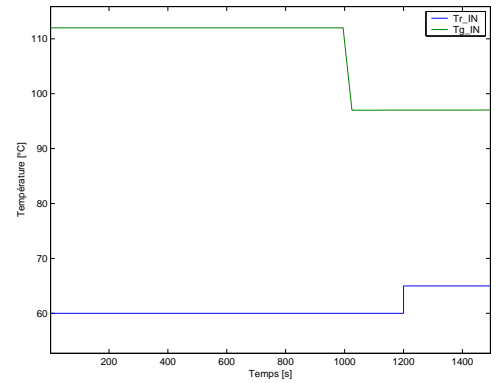


Fig. 12. Les températures à l'entrée de l'échangeur

B. Utilisation de l'observateur pour la commande

B.1 Principe de séparation sans action intégrale

Les techniques exposées dans ce paragraphe viennent des travaux de J.P Gauthier et I.Kupka [8]. On remarque que la paire (A, C) est observable, nous pouvons donc trouver une matrice K telle que la matrice $A - KC$ soit asymptotiquement stable et une matrice P symétrique définie positive telle que

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) = -Id$$

Le système dynamique auxiliaire suivant

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + u(B\hat{x} + b) - K(C\hat{x} - y) \quad (8)$$

est alors un observateur qui converge exponentiellement pourvu que le contrôle u soit assez petit. L'équation d'erreur s'écrit en effet :

$$\dot{e} = (A - KC)e + uBe \quad (9)$$

si on considère la fonction de Lyapunov $V(e) = e^T P e$, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= -e^T e + 2ue^T P B e \\ &\leq -e^T e + 2m \|P\| \|B\| e^T e \end{aligned}$$

où m est un majorant de $|u|$, il existe donc $a > 0$ tel que

$$\dot{V}(e) \leq -ae^T e$$

si m est choisi assez petit.

Dans le paragraphe III-C, nous avons trouvé un feedback qui stabilise asymptotiquement le système (4). Notons $u_s(x)$ ce feedback (rappelons qu'il peut être choisi arbitrairement petit), nous

allons voir que $u_s(\hat{x})$ stabilise encore le système (4). Plus précisément, le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + u_s(\hat{x})(B\hat{x} + b) - KCe \\ \dot{e} &= (A - KC)e + u_s(\hat{x})Be \end{cases} \quad (10)$$

est globalement asymptotiquement stable (si $|u_s|$ est choisi assez petit).

Pour le voir, on commence par calculer $\hat{x}^T \dot{\hat{x}}$:

$$\begin{aligned} \hat{x}^T \dot{\hat{x}} &= \underbrace{\hat{x}^T A\hat{x} + u_s(\hat{x})\hat{x}^T (B\hat{x} + b)}_{\leq 0} - \hat{x}^T KCe \\ &\leq -\hat{x}^T KCe \\ &\leq M\|\hat{x}\|\|e\| \end{aligned}$$

d'où, en notons $N(t) = \|\hat{x}(t)\|^2$

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{N}(t)}{\sqrt{N(t)}} \leq M\|e(t)\|$$

donc

$$\sqrt{N(t)} - \sqrt{N(0)} \leq M \int_0^t \|e(s)\| ds$$

ce qui prouve que $\hat{x}(t)$ est borné puisque $e(t)$ tend exponentiellement vers 0. Ensuite, on démontre que le système (10) est localement asymptotiquement stable en considérant la fonction $V(\hat{x}, e)$ qui est semi-définie positive par rapport aux variables \hat{x} et e . Le calcul de \dot{V} a déjà été fait et on obtient :

$$\dot{V}(\hat{x}, e) \leq -ae^T e$$

si $|u|$ est choisi assez petit. Donc $\dot{V} \leq 0$ et l'ensemble $\{(\hat{x}, e) | \dot{V}(\hat{x}, e) = 0\}$ est l'ensemble des couples $(\hat{x}, 0)$ mais le système (10) restreint à cet ensemble s'écrit

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + u_s(\hat{x})(B\hat{x} + b)$$

qui est asymptotiquement stable, un résultat de Kalitine [11] permet de conclure à la locale asymptotique stabilité de (10). De plus comme les trajectoires des ce système sont toutes bornées, la stabilité asymptotique est en fait globale.

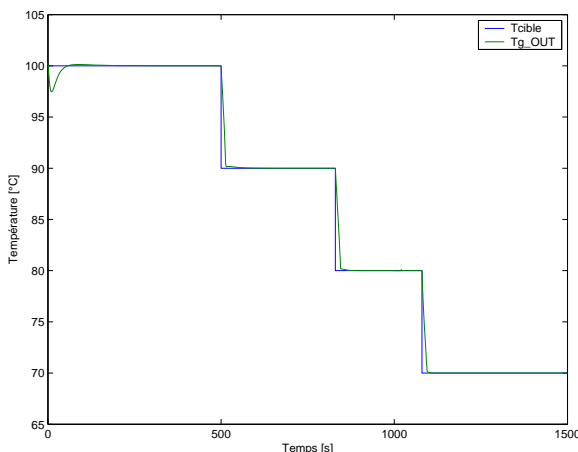


Fig. 13. Température régulée des Gaz

B.2 Principe de séparation et action intégrale

Dans ce cas, nous avons le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + u(B\hat{x} + Bx^e + b) \\ \dot{z} &= D\hat{x} \end{cases}$$

la matrice d'observation est

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et il n'est pas difficile de voir que la paire (\tilde{A}, \tilde{C}) est observable, on peut donc appliquer la technique exposée dans le paragraphe précédent.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cet article, nous avons proposé une loi de commande non linéaire d'un échangeur de chaleur. Cette commande est basée sur la construction de fonction de Lyapunov d'un système bilinéaire. Le système bilinéaire est augmenté par une action intégrale qui permet d'apporter une certaine robustesse vis à vis de la variation des paramètres du modèle de l'échangeur. La commande non linéaire ainsi construite est comparée à une commande classique de type PI. Nous pouvons remarquer que, contrairement à la commande PI, la commande bilinéaire s'adapte aux points de fonctionnement du système. Nous avons également développé un observateur non-linéaire de type grand-gain des états non mesurés de l'échangeur. Nous avons enfin démontré la stabilité du système contrôlé en utilisant l'observateur.

RÉFÉRENCES

- [1] A. DOCTER and A.LAMM. Gasoline fuel cell systems. *Journal of Power Sources*, 84, 1999.
- [2] F. BAUMANN S. WIELAND and K.A. STARZ. New powerful catalysts for autothermal reforming of hydrocarbons and water-gas shift reaction for on-board hydrogen generation in automotive pemfc applications. *SAE 2001-01-0234*, 2001.
- [3] VASILIS TSOURAPAS JING SUN ANNA STEFANOPOULO. Modeling and dynamics of a fuel cell combined heat power system for marine applications. *University Of Michigan*.
- [4] S. GIBOUT M. STRUB J. CASTAING-LASVIGNOTTES, F. STRUB. Prise en compte des régimes variables associés aux échangeurs thermiques : Modélisation, analyse énergétique et entropique. *COFRET'04*, 2004.
- [5] B.P. RASMUSSEN. *Control-Oriented Modeling of Transcritical Vapor Compression System*. PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2002.
- [6] H. TUMMESCHEIT J.M. JENSEN. Moving boundary models for dynamic simulation of two-phase flow. *Second International Modelica Conference*, 2002.
- [7] F. BENAICHA K. BENCHERIF M. SORINE and J.C. VIVALDA. Water and heat conservation modelling for a reformat supplied fuel cell system. *POWERENG 2007. SETUBAL*.
- [8] J.P. Gauthier and I. Kupka. A separation principle for bilinear systems with dissipative drift. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 37, no 12, pp. 1970-1974, 1992.
- [9] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Trans. Autom. Control*, 37, no 6, pp. 875-880, 1992.
- [10] Philippe de Larminat. *Automatique appliquée*. Hermès - Lavoisier.
- [11] Boris Kalitine. Sur la stabilité des ensembles compacts positivement invariants des systèmes dynamiques. *RAIRO, Autom. Syst. Anal. Control*, vol. 16, pp 275-286, 1982.