

# Stabilisation exponentielle des modèles flous de type Takagi-Sugeno à retards variables dans le temps

Hamdi GASSARA<sup>1,2</sup>, Ahmed EL HAJJAJI<sup>1</sup>, Maher CHAABENE<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Modélisation, Information et Système,  
Université de Picardie Jules Verne, UPJV  
7 rue de Moulin Neuf, 80000, Amiens-France.  
*hamdi.gassara@u-picardie.fr, ahmed.hajjai@u-picardie.fr*

<sup>2</sup>Commande des machines Electriques et Réseaux de puissance  
Université de sfax, Ecole Nationale d'Ingénieur de Sfax-Tunisie  
Route de Soukra, km 3.5 - BP W, 3038 Sfax-Tunisie  
*maherchaabane@isetsf.rnu.tn*

**Résumé**— Dans cette communication, nous s'intéressons au problème de la stabilisation exponentielle des systèmes non linéaires décrits par des modèles flous de type Takagi Sugeno (TS) à retards variables et bornés ( $\tau_m \leq \tau(t) \leq \tau_M$ ). L'objectif principal concerne la synthèse d'un contrôleur flou de type PDC (Parallel Distributed Compensation) assurant la stabilité exponentielle du système en boucle fermée avec un taux de convergence garanti. Des conditions suffisantes de stabilisation sont données sous-forme des Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs). Enfin, un exemple de simulation est proposé pour illustrer l'efficacité du résultat proposé.

**Mots-clés**— Inégalité Matricielles Linéaires (LMI), modèle Takagi-Sugeno, Système à retard.

## I. INTRODUCTION

Ces dernières années, l'analyse et la synthèse des lois de commande des systèmes non linéaires à retard décrits par des modèles flous de type TS, ont été largement étudiées dans la littérature [1], [2], [3], [4], [5], [6], [10], [11], [12]. Souvent la motivation principale de ces travaux est liée d'une part à la capacité des modèles flous à représenter une large classe des systèmes non linéaires (approximateurs universels) et d'autre part aux conséquences du retard sur le comportement des systèmes dynamiques. En effet, il est bien connu que la présence du retard dans les systèmes dynamiques est une source d'instabilité et de dégradation des performances. Les phénomènes de retard apparaissent naturellement dans la modélisation de nombreux processus physiques tels que la biologie, l'écologie, les télécommunications, etc. Les premiers résultats présentés dans la littérature sont indépendantes de la valeur du retard. Ces conditions s'avèrent souvent restrictives. Pour réduire le conservatisme, des résultats dépendantes du retard ont été présentés dans [1]-[10]-[2] [9]. En outre, la plupart des résultats proposés dans la littérature concernent la stabilité asymptotique des modèles flous à retards variables ou constants. Mais, il est plus important de garantir une convergence exponentielle car elle permet d'assurer une rapidité de convergence. Récemment, B. Zhang *et al.* [12] se sont investis dans l'élaboration de critères garantissant une convergence exponentielle pour les modèles T-S à retards. Cependant, ce résultat est limité au cas des retards constants. Or dans la majorité des cas pratiques, par exemple dans les lignes de communications à travers des

réseaux internet, le retard ne peut être réduit au seul cas du retard constant. La motivation de cet article consacré à la stabilisation exponentielle des modèles flous T-S à retard variable dans le temps borné est donc claire. Cet article est structuré de la manière suivante : La section 2 présente une brève description de la classe du modèle T-S à retards considérée. Les conditions de stabilisation exponentielle des systèmes concernés seront présentées sous forme LMI dans section 3. Enfin, un exemple numérique illustrera l'efficacité du résultat obtenu.

Notations : La notation  $X > 0$  pour  $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  signifie que la matrice  $X$  est symétrique, définie positive. Soit  $|\cdot|$  la norme euclidienne dans  $\mathfrak{R}^n$ . Pour une matrice réelle  $A$ , nous notons par  $\|\cdot\|$  la norme matricielle induite définie par  $\|A\| = \sup\{|Ax| : |x| = 1\}$ ;  $\lambda_{max}(A)$  et  $\lambda_{min}(A)$  par les valeurs propres maximales et minimales.

## II. FORMULATION DU PROBLÈME

Considérons le système non linéaire à retards variables dans le temps bornés décrit par le modèle T-S suivant :

SI  $\theta_1$  est  $\mu_{i1}$  et  $\dots$  et  $\theta_p$  est  $\mu_{ip}$  ALORS

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + A_{\tau_i} x(t - \tau(t)) + B_i u(t) \\ x(t) &= \psi(t), t \in [-\tau_m, -\tau_M],\end{aligned}\quad (1)$$

Où  $x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$  est le vecteur d'état,  $i = \{1, \dots, r\}$ ,  $r$  est le nombre des règles,  $\mu_{ij}$  sont les fonctions d'appartenance des ensembles flous,  $j = \{1, \dots, p\}$ ,  $u(t) \in \mathfrak{R}^{n_u}$  est le vecteur d'entrée,  $\theta_1(x(t)), \dots, \theta_p(x(t))$  sont les variables des prémisses qui peuvent être des fonctions des variables d'état, des entrées ou une combinaison des deux. Le modèle global peut s'écrire comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(x(t))) [A_i x(t) + A_{\tau_i} x(t - \tau(t)) + B_i u(t)] \quad (2)$$

nous notons dans la suite

$$\tau_1 = \frac{\tau_m + \tau_M}{2}; \tau_1 = \frac{\tau_M - \tau_m}{2}$$

avec une condition supplémentaire sur la dérivée du retard

$$\dot{\tau}(t) < \beta \quad (3)$$

La commande globale est donnée par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i K_i x(t) \quad (4)$$

En substituant (2) dans (4), l'expression obtenue est la suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [\hat{A}_{ij} x(t) + A_{\tau i} x(t - \tau(t))] \quad (5)$$

avec  $\hat{A}_{ij} = A_i + B_i K_j$

Notons  $\hat{A}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \hat{A}_{ij}$ ,  $A_{\tau}(t) = \sum_{i=1}^r h_i A_{\tau i}$ , nous

obtenons

$$\dot{x}(t) = \hat{A}(t)x(t) + A_{\tau}(t)x(t - \tau(t)) \quad (6)$$

**Définition 1** : Le système à retard (6) est dit **exponentiellement stable** avec un taux de décroissance  $\lambda$ , s'il existe un  $M > 0$  et un  $\lambda > 0$  tels que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\|x(t)\| \leq M e^{-\lambda t} \|\psi\|_c;$$

avec  $\|\psi\|_c = \sup_{-\tau_m \leq \alpha \leq -\tau_M} \|\psi(\alpha)\|$

**Lemme 1** [8] Soit une matrice définie négative  $\Pi < 0$ .

Quelle que soit une matrice  $X$  de dimension appropriée telle que  $X^T \Pi X < 0$  alors  $\exists \alpha \in R^+$  telle que  $X^T \Pi X \leq -2\alpha X - \alpha^2 \Pi^{-1}$ .

### III. RÉSULTATS PRINCIPAUX

**Théorème 1** : Le système (6) est exponentiellement stable avec un taux de convergence  $\frac{\lambda}{2}$ , s'il existe des matrices  $P$ ,  $Q_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $R_i (i = 1, 2, 3, 4)$ , telles que les LMI suivantes soient satisfaites :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11}(t) & \Omega_{12}(t) \\ * & \Omega_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

avec

$$\Omega_{11}(t) = \begin{bmatrix} \omega_{11}(t) & R_4 & P A_{\tau}(t) & 0 & 0 \\ * & \omega_{22} & R_3 & e^{\lambda \tau_2} Q_2 + R_1 & 0 \\ * & * & \omega_{33} & 0 & R_3 \\ * & * & * & \omega_{44} & Q_2 + R_2 \\ * & * & * & * & -Q_3 \\ * & * & * & * & -R_2 - R_3 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{12}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}(t)^T & \hat{A}(t)^T & \hat{A}(t)^T & \hat{A}(t)^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{\tau}(t)^T & A_{\tau}(t)^T & A_{\tau}(t)^T & A_{\tau}(t)^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Omega_{22} = \text{diag}[-(\tau_2 \frac{e^{\lambda \tau_1} - e^{\lambda \tau_m}}{\lambda})^{-1} R_1^{-1}, -(\tau_2 \frac{e^{\lambda \tau_M} - e^{\lambda \tau_1}}{\lambda})^{-1} R_2^{-1}, -(\tau_2 \frac{e^{\lambda \tau_M} - e^{\lambda \tau_m}}{\lambda})^{-1} R_3^{-1}, -(\tau_m \frac{e^{\lambda \tau_M} - e^{\lambda \tau_m}}{\lambda})^{-1} R_4^{-1}]$   
où

$$\omega_{11}(t) = \lambda P + P \hat{A}(t) + \hat{A}(t)^T P + e^{\lambda \tau_M} Q_4 + e^{\lambda \tau_m} Q_5 - R_4$$

$$\omega_{22} = e^{\lambda \tau_2} Q_1 - Q_5 - R_1 - R_3 - R_4$$

$$\omega_{33} = -(1 - \beta) Q_4 - 2 R_3$$

$$\omega_{44} = e^{\lambda \tau_2} Q_3 - Q_1 - R_1 - R_2 - R_3$$

**Démonstration** : Soit la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(t) = \sum_{i=1}^5 V_i(t) \quad (8)$$

avec

$$\begin{aligned} V_1(t) &= e^{\lambda t} x(t)^T P x(t) + \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_m} e^{\lambda(s+\tau_1)} [x(s)^T Q_1 x(s) \\ &\quad + 2x(s)^T Q_2 x(s - \tau_2) + x(s - \tau_2)^T Q_3 x(s - \tau_2)] ds \\ &\quad + \int_{t-\tau(t)}^t e^{\lambda(s+\tau_M)} x(s)^T Q_4 x(s) ds \\ &\quad + \int_{t-\tau_m}^t e^{\lambda(s+\tau_m)} x(s)^T Q_5 x(s) ds \end{aligned}$$

$$V_2(t) = \tau_2 \int_{-\tau_1}^{-\tau_m} \int_{t+\sigma}^t e^{\lambda(s-\sigma)} \dot{x}(s)^T R_1 \dot{x}(s) ds d\sigma$$

$$V_3(t) = \tau_2 \int_{-\tau_M}^{-\tau_1} \int_{t+\sigma}^t e^{\lambda(s-\sigma)} \dot{x}(s)^T R_2 \dot{x}(s) ds d\sigma$$

$$V_4(t) = 2\tau_2 \int_{-\tau_M}^{-\tau_m} \int_{t+\sigma}^t e^{\lambda(s-\sigma)} \dot{x}(s)^T R_3 \dot{x}(s) ds d\sigma$$

$$V_5(t) = \tau_m \int_{-\tau_m}^0 \int_{t+\sigma}^t e^{\lambda(s-\sigma)} \dot{x}(s)^T R_4 \dot{x}(s) ds d\sigma$$

La dérivée est présentée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \lambda e^{\lambda t} x(t)^T P x(t) + 2e^{\lambda t} x(t)^T P \dot{x}(t) + e^{\lambda(t+\tau_2)} x(t - \tau_m)^T Q_1 x(t - \tau_m) \\ &\quad + 2e^{\lambda(t+\tau_2)} x(t - \tau_m)^T Q_2 x(t - \tau_1) + e^{\lambda(t+\tau_2)} x(t - \tau_1)^T Q_3 x(t - \tau_1) \\ &\quad - e^{\lambda t} x(t - \tau_1)^T Q_1 x(t - \tau_1) - 2e^{\lambda t} x(t - \tau_1)^T Q_2 x(t - \tau_M) \\ &\quad - e^{\lambda t} x(t - \tau_M)^T Q_3 x(t - \tau_M) + e^{\lambda(t+\tau_M)} x(t)^T Q_4 x(t) \\ &\quad - (1 - \dot{\tau}(t)) e^{\lambda(t-\tau(t)+\tau_M)} x(t - \tau(t))^T Q_4 x(t - \tau(t)) \\ &\quad + e^{\lambda(t+\tau_m)} x(t)^T Q_5 x(t) - e^{\lambda t} x(t - \tau_m)^T Q_5 x(t - \tau_m) \end{aligned}$$

$$\leq e^{\lambda t} \{ x(t)^T (\lambda P + P \hat{A}(t) + \hat{A}(t)^T P + e^{\lambda \tau_M} Q_4 + e^{\lambda \tau_m} Q_5) x(t) + 2x(t)^T P A_{\tau}(t) x(t - \tau(t)) + x(t - \tau_m)^T (e^{\lambda \tau_2} Q_1 - Q_5) x(t - \tau_m) + 2e^{\lambda \tau_2} x(t - \tau_m)^T Q_2 x(t - \tau_1) + x(t - \tau_1)^T (e^{\lambda \tau_2} Q_3 - Q_1) x(t - \tau_1) - 2x(t - \tau_1)^T Q_2 x(t - \tau_M) - x(t - \tau_M)^T Q_3 x(t - \tau_M) - (1 - \beta) x(t - \tau(t))^T Q_4 x(t - \tau(t)) \}$$

$$\dot{V}_2(t) = \tau_2 \int_{-\tau_1}^{-\tau_m} [e^{\lambda(t-\sigma)} \dot{x}(t)^T R_1 \dot{x}(t) - e^{\lambda t} \dot{x}(t+\sigma)^T R_1 \dot{x}(t+\sigma) d\sigma] = e^{\lambda t} \{ \frac{e^{\lambda \tau_1} - e^{\lambda \tau_m}}{\lambda} \dot{x}(t)^T R_1 \dot{x}(t) - \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_m} \dot{x}(s)^T R_1 \dot{x}(s) ds \}$$

de la même manière,

$$\dot{V}_3(t) = \tau_2 e^{\lambda t} \{ \frac{e^{\lambda \tau_M} - e^{\lambda \tau_1}}{\lambda} \dot{x}(t)^T R_2 \dot{x}(t) - \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_1} \dot{x}(s)^T R_2 \dot{x}(s) ds \}$$

$$\dot{V}_4(t) = 2\tau_2 e^{\lambda t} \{ \frac{e^{\lambda \tau_M} - e^{\lambda \tau_m}}{\lambda} \dot{x}(t)^T R_3 \dot{x}(t) - \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_m} \dot{x}(s)^T R_3 \dot{x}(s) ds \}$$

$$\dot{V}_5(t) = \tau_m e^{\lambda t} \{ \frac{e^{\lambda \tau_m} - 1}{\lambda} \dot{x}(t)^T R_4 \dot{x}(t) - \int_{t-\tau_m}^t \dot{x}(s)^T R_4 \dot{x}(s) ds \}$$

En appliquant l'inégalité intégrale de jessen [7], nous obtenons :

$$\begin{aligned} & -\tau_2 \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_m} \dot{x}(s)^T R_1 \dot{x}(s) ds \\ & \leq \begin{bmatrix} x(t - \tau_m) \\ x(t - \tau_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ * & -R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - \tau_m) \\ x(t - \tau_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& -\tau_2 \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_1} \dot{x}(s)^T R_2 \dot{x}(s) ds \\
\leq & \begin{bmatrix} x(t-\tau_1) \\ x(t-\tau_M) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R_2 & R_2 \\ * & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\tau_1) \\ x(t-\tau_M) \end{bmatrix} \\
& -2\tau_2 \int_{t-\tau_M}^{t-\tau_1} \dot{x}(s)^T R_3 \dot{x}(s) ds \leq -(\tau(t) - \tau_m) \\
& \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_m} \dot{x}(s)^T R_3 \dot{x}(s) ds - (\tau_M - \tau(t)) \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)} \dot{x}(s)^T R_3 \dot{x}(s) ds \\
\leq & \begin{bmatrix} x(t-\tau_m) \\ x(t-\tau(t)) \\ x(t-\tau_M) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R_3 & R_3 & 0 \\ * & -2R_3 & R_3 \\ * & * & -R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\tau_m) \\ x(t-\tau(t)) \\ x(t-\tau_M) \end{bmatrix} \\
& -\tau_m \int_{t-\tau_m}^t \dot{x}(s)^T R_4 \dot{x}(s) ds \\
\leq & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_m) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R_4 & R_4 \\ * & -R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_m) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Soit  $\eta(t) = [x(t)^T, x(t-\tau_m)^T, x(t-\tau(t))^T, x(t-\tau_1)^T, x(t-\tau_M)^T]^T$ , nous obtenons :

$$\dot{V}(t) \leq e^{\lambda t} \{ \eta(t)^T \Omega_{11}(t) \eta(t) + \dot{x}(t)^T (\tau_2 \frac{e^{\lambda \tau_1} - e^{\lambda \tau_m}}{\lambda} R_1 + \tau_2 \frac{e^{\lambda \tau_M} - e^{\lambda \tau_1}}{\lambda} R_2 + 2\tau_2 \frac{e^{\lambda \tau_M} - e^{\lambda \tau_m}}{\lambda} R_3 + \tau_m \frac{e^{\lambda \tau_M} - e^{\lambda \tau_m}}{\lambda} R_4) \dot{x}(t) \}$$

En utilisant le complément de Schur, on peut facilement obtenir que (7) est équivalent à  $\dot{V}(x(t)) \leq 0$  pour  $t \geq 0$ . Ceci implique que pour  $t \geq 0$ ,  $V(t) \leq V(0)$ .

A partir (8), nous obtenons

$$\begin{aligned}
V_1(0) & \leq \lambda_{max}(P) \|\psi\|^2 + 2\lambda_{max}(Q) \|\psi\|^2 \\
& \int_{-\tau_1}^{-\tau_m} e^{\lambda(s+\tau_1)} ds + \lambda_{max}(Q_4) \|\psi\|^2 \int_0^{-\tau_M} e^{\lambda(s+\tau_M)} ds \\
& + \lambda_{max}(Q_5) \|\psi\|^2 \int_0^{-\tau_m} e^{\lambda(s+\tau_m)} ds \\
& = \lambda_{max}(P) + 2 \frac{e^{\lambda \tau_2} - 1}{\lambda} \lambda_{max}(Q) + \frac{e^{\lambda \tau_M} - 1}{\lambda} \lambda_{max}(Q_4) + \\
& \frac{e^{\lambda \tau_m} - 1}{\lambda} \lambda_{max}(Q_5) \|\psi\|^2 = \delta_1 \|\psi\|^2
\end{aligned}$$

avec

$$Q = \begin{bmatrix} Q1 & Q2 \\ * & Q3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
V_2(0) & = \int_{-\tau_1}^{-\tau_m} \int_{\sigma}^0 e^{\lambda(s-\sigma)} \dot{x}(s)^T R_1 \dot{x}(s) ds d\sigma \\
\leq & \int_{-\tau_1}^{-\tau_m} \int_{-\tau_1}^s e^{\lambda(s-\sigma)} \dot{x}(s)^T R_1 \dot{x}(s) ds d\sigma \\
& = \int_{-\tau_1}^{-\tau_m} \frac{e^{\lambda(s+\tau_1)} - 1}{\lambda} \dot{x}(s)^T R_1 \dot{x}(s) ds \\
\leq & 2 \frac{e^{\lambda \tau_2} - \lambda \tau_2 - 1}{\lambda^2} \lambda_{max}(R_1) (\|A\|^2 + \|A_\tau\|^2) \|\psi\|^2 \\
& = \delta_2 \|\psi\|^2
\end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons

$$V_3(0) \leq \delta_3 \|\psi\|^2 \quad (9)$$

$$V_4(0) \leq \delta_4 \|\psi\|^2 \quad (10)$$

$$V_5(0) \leq \delta_5 \|\psi\|^2 \quad (11)$$

avec

$$\delta_3 = 2 \frac{e^{\lambda \tau_2} - \lambda \tau_2 - 1}{\lambda^2} \lambda_{max}(R_2) (\|A\|^2 + \|A_\tau\|^2)$$

$$\delta_4 = 2 \frac{e^{2\lambda \tau_2} - 2\lambda \tau_2 - 1}{\lambda^2} \lambda_{max}(R_3) (\|A\|^2 + \|A_\tau\|^2)$$

$$\delta_5 = 2 \frac{e^{\lambda \tau_m} - \lambda \tau_m - 1}{\lambda^2} \lambda_{max}(R_4) (\|A\|^2 + \|A_\tau\|^2)$$

Par suite

$$V(0) \leq (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5) \|\psi\|^2 \quad (12)$$

D'autre part,

$$V(t) \geq e^{\lambda t} x(t)^T P x(t) \geq \lambda_{min}(P) e^{\lambda t} \|x(t)\|^2 \quad (13)$$

On obtient :

$$\|x(t)\| \leq \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5}{\lambda_{min}(P)} e^{-\frac{\lambda}{2} t} \|\psi\| \quad (14)$$

Le système est alors exponentiellement stable avec un taux  $\frac{\lambda}{2}$  de convergence.

L'objectif du théorème suivant est de mettre les inégalités du théorème 1 sous forme des inégalités matricielles linéaires qu'on peut résoudre facilement en utilisant la boîte à outils LMI TOOLBOX du logiciel Matlab.

**Théorème 2 :** Pour des scalaires  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  donné, le système est exponentiellement stable avec un taux de convergence  $\frac{\lambda}{2}$ , s'il existe des matrices  $X, \tilde{Q}_l (l = 1, 2, 3, 4, 5), \tilde{R}_l (l = 1, 2, 3, 4)$  telles les conditions LMI suivantes soient satisfaites pour  $i, j = 1, 2, \dots, r, i \leq j$  :

$$\Omega^{ij} + \Omega^{ji} \leq 0 \quad (15)$$

avec

$$\Omega^{ij} = \begin{bmatrix} \Omega_{11}^{ij} & \Omega_{12}^{ij} \\ * & \Omega_{22} \end{bmatrix}$$

où

$$\Omega_{11}^{ij} = \begin{bmatrix} \omega_{11}^{ij} & \tilde{R}_4 & A_{\tau_i} X & 0 & 0 \\ * & \omega_{22} & \tilde{R}_3 & e^{\lambda \tau_2} \tilde{Q}_2 + \tilde{R}_1 & 0 \\ * & * & \omega_{33} & 0 & \tilde{R}_3 \\ * & * & * & \omega_{44} & \tilde{Q}_2 + \tilde{R}_2 \\ * & * & * & * & -\tilde{Q}_3 - \tilde{R}_2 - \tilde{R}_3 \end{bmatrix}$$

où

$$\omega_{11}^{ij} = \lambda X + A_i X + B_i N_j + X A_i^T + N_j^T B_i^T + e^{\lambda \tau_m} \tilde{Q}_4 + e^{\lambda \tau_m} \tilde{Q}_5 - \tilde{R}_4$$

$$\omega_{22} = e^{\lambda \tau_2} \tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_5 - \tilde{R}_1 - \tilde{R}_3 - \tilde{R}_4$$

$$\omega_{33} = -(1 - \beta) \tilde{Q}_4 - 2\tilde{R}_3$$

$$\omega_{44} = e^{\lambda \tau_2} \tilde{Q}_3 - \tilde{Q}_1 - \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2 - \tilde{R}_3$$

$$\Omega_{12}^{ij} = \begin{bmatrix} X A_i^T & X A_i^T & X A_i^T & X A_i^T \\ + N_j^T B_i^T & + N_j^T B_i^T & + N_j^T B_i^T & + N_j^T B_i^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ X A_{\tau_i}^T & X A_{\tau_i}^T & X A_{\tau_i}^T & X A_{\tau_i}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{22} & = \text{diag} \{ (\tau_2 \frac{e^{\lambda \tau_1} - e^{\lambda \tau_m}}{\lambda})^{-1} (-2\alpha_1 X + \alpha_1^2 \tilde{R}_1), \\
& (\tau_2 \frac{e^{\lambda \tau_M} - e^{\lambda \tau_1}}{\lambda})^{-1} (-2\alpha_2 X + \alpha_2^2 \tilde{R}_2), (2\tau_2 \frac{e^{\lambda \tau_M} - e^{\lambda \tau_m}}{\lambda})^{-1} (-2\alpha_3 X + \\
& \alpha_3^2 \tilde{R}_3), (\tau_m \frac{e^{\lambda \tau_M} - e^{\lambda \tau_m}}{\lambda})^{-1} (-2\alpha_4 X + \alpha_4^2 \tilde{R}_4) \}
\end{aligned}$$

Dans ce cas les gains de la commande PDC  $K_i$  sont donnés comme suit

$$K_i = N_i X^{-1}, i = 1, 2, \dots, r \quad (16)$$

**Démonstration :**

$$\Omega(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Gamma_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji})$$

avec  $\Gamma_{ij}$  est obtenu en remplaçant  $A_\tau(t)$  et  $\hat{A}(t)$  en  $\Omega(t)$  par  $A_{\tau i}$  et  $\hat{A}_{ij}$ , respectivement.

Soit  $X = P^{-1}$ . En multipliant  $\Gamma_{ij}$  par

$$\text{diag} [ X \ X \ X \ X \ X \ I \ I \ I \ I ]$$

à droite et à gauche avec  $N_j = K_j X$ ,  $\tilde{Q}_i = X Q_i X$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ),  $\tilde{R}_i = X R_i X$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Ensuite, en appliquant lemme 1, nous obtenons le théorème 2.

#### IV. EXEMPLE NUMÉRIQUE DE SIMULATION

Afin de démontrer l'importance du résultat de stabilisation exponentielle, nous considérons l'exemple numérique suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i [A_i x(t) + A_{\tau i} x(t - \tau(t)) + B_i u(t)] \quad (17)$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{\tau 1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}, A_{\tau 2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

et

$$h_1(x_2(t)) = \sin(x_2(t))^2, h_2(x_2(t)) = \cos(x_2(t))^2$$

$$\tau(t) = 0.6 + 0.2 \sin(t) (\tau_m = 0.4; \tau_M = 0.8)$$

La résolution des LMIs du théorème 2 pour  $\lambda = 3$  et avec le choix de  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 5$ , donne la solution suivante :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.3323 & -0.9949 \\ -2.2256 & -2.6812 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -0.6673 & -1.1140 \\ -1.9922 & -4.6820 \end{bmatrix}$$

Les figures 1 et 2 représentent l'évolution des états et du signal de commande

la figure 3 représente l'évolution de  $|x(t)|$  pour trois valeurs de taux de décroissance  $\lambda$ . Nous remarquons bien que plus le taux de décroissance est élevé plus la convergence est rapide.

#### V. CONCLUSION

Dans ce papier, la stabilisation exponentielle d'une classe des modèles flous T-S à retards variables dans le temps bornés, a été considérée. Nous avons proposé des conditions suffisantes sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) que l'on peut résoudre facilement avec les outils numériques classiques. Enfin, un exemple de simulation est proposé pour illustrer l'efficacité du résultat obtenu.

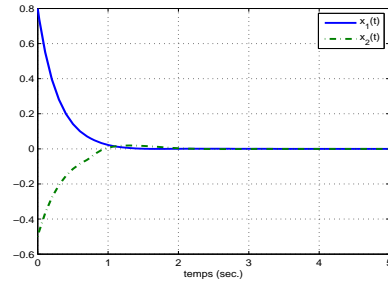


Fig. 1. évolution des états du système (17) avec un retard  $\tau(t) = 0.6 + 0.2 \sin(t)$

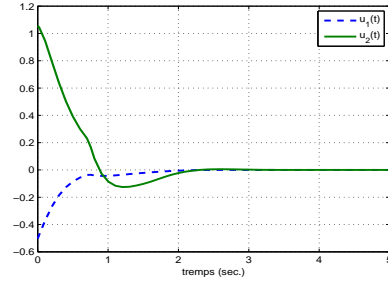


Fig. 2. évolution de la commande du système (17) avec un retard  $\tau(t) = 0.6 + 0.2 \sin(t)$

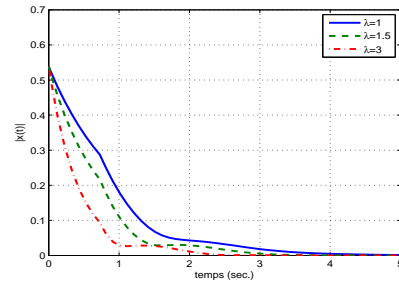


Fig. 3.  $|x(t)|$  du système (17) avec un retard  $\tau(t) = 0.6 + 0.2 \sin(t)$

#### RÉFÉRENCES

- [1] B. Chen et X. Liu *Delay-dependent guaranteed cost control for T-S fuzzy systems with time delays*, Fuzzy Sets and Systems, 12(2) :236-249, 2004.
- [2] X.P. Guan et C.L. Chen *Delay-dependent robust  $H_\infty$  control for T-S fuzzy systems with time delay*, IEEE Transactions on fuzzy systems, 13(4) : 544-556, 2005.
- [3] H. Gassara, A. El Hajjaji et M. Chaabane *Robust Control of T-S fuzzy systems with Time-varying delay using new approach*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009, in press.
- [4] H. Gassara, A. El Hajjaji et M. Chaabane *Delay-dependent stabilization conditions of T-S fuzzy systems with time varying delay*, 17th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'2009), Thessaloniki, Greece, Juin 2009.
- [5] H. Gassara, A. El Hajjaji, M. Chaabane, *Robust Control of T-S fuzzy systems with Time-varying delay : New approach*, 48th IEEE Conference on Decision and Control, accepted in IEEE-CDC'09 December 16-18, 2009, Shanghai, China
- [6] H. Gassara, A. El Hajjaji, M. Chaabane, *Robust stability and stabilization conditions for time-delay fuzzy systems using fuzzy weighting-dependent approach*, Proceedings of the European Control Conference, ECC'09, pp.365-370, ISBN 978-963-311-369-1, August 23-26, 2009, Budapest, Hungary.
- [7] K. Gu, V. L. Kharitonov and J. Chen *Stability of time delay systems*. Birhauser, 2003.
- [8] Guerra, T.M., Kruszewski, A., Vermeiren, L., and Tirmant, H., *Conditions of output stabilization for nonlinear models in the*

*Takagi-Sugenoform* , Fuzzy Sets and Systems, 157 (9), pp. 1248-1259.

- [9] Y. He, M. Wu et G.P. Liu, *Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties*. IEEE Transactions on Automatic Control, 49(5) :828-832, 2004.
- [10] C. Li, H. Wang et X. Liao *Delay-dependent robust stability of uncertain fuzzy systems with time-varying delays*, Proc. Inst. Elect. Eng. Control Theory Appl., 151(4) :417-421, 2004.
- [11] H. Wu et H. Li *New Approach to Delay-Dependent Stability Analysis and Stabilization for Continuous-Time Fuzzy Systems With Time-Varying Delay*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15(3) :482-493, 2007.
- [12] B. Zhang, J. Lam, S. Xu et Z. Shu *Robust stabilization of uncertain T-S fuzzy time-delay systems with exponential estimates*. Fuzzy sets and systems, 160 :1720-1737, 2009.