

Synthèse d'observateur robuste pour la détection de défauts d'une classe de systèmes à commutations

Djamel. E. C. BELKHIAT, Nadhir MESSAI, Nouredine MANAMANNI

Université de Reims Champagne Ardenne, CReSTIC
UFR SEN, Moulin de la Housse BP 1039, 51687, Reims cedex2, FRANCE.
e-mail : {prénom.nom}@univ-reims.fr

Résumé— Ce papier traite de la synthèse d'observateurs hybrides robustes pour une classe de systèmes linéaires à commutations (SLC). Ces derniers sont soumis à des effets indésirables dus à des entrées inconnues (bruit de mesure, perturbations externes, ...) et/ ou des erreurs de modélisation. Le rôle de l'observateur est d'améliorer la tâche de détection de défauts en supposant que l'on ne dispose d'aucune information sur le mode actif du SLC. Pour ce faire nous proposons de formaliser le problème de synthèse à travers la minimisation d'un critère H_∞ . Des conditions de convergence sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) seront alors établies et une procédure itérative permettant de résoudre numériquement l'ensemble des LMI sera également proposée. Des résultats de simulation illustreront les performances de l'approche proposée.

Mots-clés— Système Hybride ; Système à commutations ; Observateur Hybride ; Détection de défauts ; H_∞ ; Inégalités Matricielles Linéaires (LMI).

I. INTRODUCTION

Durant les dernières décennies, différents travaux ont porté sur la conception et la synthèse de lois de commande à même d'améliorer les performances et d'assurer la stabilité de plusieurs classes de systèmes dynamiques hybrides (SDH), [1] [2]. Cependant, dès l'occurrence d'un défaut, ces lois de commande deviennent souvent inefficaces et des techniques de détection et d'isolation de défauts s'avèrent nécessaires afin d'éviter des anomalies de fonctionnement qui risquent d'endommager le système au cours de son fonctionnement.

Plusieurs approches concernant la détection de défauts ont été étudiées dans la littérature [3][4]. Ainsi une approche de linéarisation autour des points de fonctionnement a été proposée, en vue d'appliquer des approches classiques issues de la théorie des systèmes continus. [5] [6]. Dans le même contexte, l'approche à base d'espace de parité a été étendue à une classe de système hybride [7] afin d'identifier le mode actif, d'estimer les instants de commutation et de détecter les défauts. Par ailleurs, d'autres résultats similaires, exploitant des observateurs à mémoire finie, ont été développés dans [5]. De plus, des résultats utilisant l'identification paramétrique ont été adaptés pour la détection de défauts affectant la partie continue d'un SDH [8]. Notons également que d'autres travaux ont considéré des observateurs non-linéaires pour l'estimation d'états, la détermination du mode actif et des paramètres inconnus du SDH [9]. Cependant, peu de travaux de la littérature traitent le cas d'un SDH caractérisé par des erreurs de modélisation et de perturbations externes.

En effet, la robustesse du dispositif de détection et d'isolation de défauts (DID) vis-à-vis des perturbations

externes et d'erreurs de modélisation est une question primordiale, car il n'est pas toujours évident d'avoir un modèle exacte du système à étudier. D'autre part, la sensibilité du DID aux défauts affectant le système est une autre question cruciale que l'on doit traiter [10]. Ainsi, l'objectif de ce papier est de proposer une approche permettant de garantir un bon compromis entre la robustesse et la sensibilité du DID.

Dans ce travail, nous proposons une approche de synthèse d'observateur pour une classe de systèmes linéaires à commutations caractérisée par la présence de sauts d'états aux instants de commutations. Cet observateur a pour rôle d'améliorer la tâche de détection de défauts en l'absence totale de connaissances sur le mode actif du SLC. Pour ce faire, le problème est formulé en exploitant une approche d'optimisation H_∞ [11], [12] et [13].

Cet article est organisé de la façon suivante ; la section deux, présente la classe de SDH considérée dans ce travail. Notre démarche de synthèse d'observateur est donnée dans la section trois. Finalement, un exemple de simulation illustrant l'efficacité de l'approche proposée est présenté dans la section quatre.

II. SYSTEME LINEAIRE A COMMUTATIONS

De manière générale, deux types de défauts peuvent influencer le comportement d'un SLC [8] :

- Les défauts affectant la partie continue (actionneurs, capteurs, paramétriques,...).
- Les défauts affectant la partie discrète (non transition, transition vers un mode non successeur,...).

Dans la suite de ce travail, on s'intéresse au premier type de défauts et plus particulièrement les défauts capteurs et/ou actionneurs pouvant affecter une classe de systèmes linéaires à commutations. Celle-ci est modélisée en tenant compte des effets indésirables pouvant être causés par des entrées inconnues et/ ou des erreurs de modélisation.

Ainsi, dans la suite de ce papier nous considérons le système à commutations composé de N sous-systèmes linéaires et donné par :

$$\dot{x} = A_{q(t)}x + Bu + B_{d_{q(t)}}d + B_{f_{q(t)}}f \quad (1)$$

$$y = Cx + D_{d_{q(t)}}d + D_{f_{q(t)}}f \quad (2)$$

où $x \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathfrak{R}^m$ est le vecteur des entrées, $y \in \mathfrak{R}^p$ représente le vecteur de sortie, $d \in \mathfrak{R}^m$ est le vecteur des entrées inconnues (perturbations, incertitudes non structurées, bruits), $f \in \mathfrak{R}^l$ est le vecteur des défauts à détecter et à localiser. $A_{q(t)}, B, C, B_{f_{q(t)}}, B_{d_{q(t)}}, D_{f_{q(t)}}, D_{d_{q(t)}}$ sont des matrices connues de dimensions appropriées, $q(t) \in Q = 1, 2, \dots, N$ est l'état discret (indice du mode à l'instant t).

Sans perte de généralité, on suppose que les deux vecteurs d, f sont bornés en norme L_2 .

Nous considérons que le passage d'un sous système à un autre ne se produit qu'à des endroits bien précis de l'espace d'état, noté $G_{i,j}$, qui sont décrits par des hyper plans linéaires :

$$G_{i,j} = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid g_{i,j}(x) = 0\}, \quad (i, j) \in I_g \quad (3)$$

Où I_g est un ensemble de uplets regroupant les différentes transitions possibles, entre deux modes, qui peuvent avoir lieu dans un système à commutations. Tout au long de ce travail, nous supposons qu'il y a seulement un nombre fini de changements de mode en un temps fini, et que, tous les couples $(A_{q(t)}, C)$ sont observables.

III. SYNTHÈSE DE L'OBSERVATEUR ROBUSTE

La structure de l'observateur proposé est donnée par :

$$\dot{\hat{x}} = A_{\hat{q}(t)}\hat{x} + Bu + K_{\hat{q}(t)}(y - \hat{y}) \quad (4)$$

$$y = C\hat{x} \quad (5)$$

$$r = V(y - \hat{y}) \quad (6)$$

où $\hat{x} \in \mathfrak{R}^n$ et $\hat{y} \in \mathfrak{R}^p$ sont respectivement les vecteurs d'état et de sortie estimés, r est le vecteur des résidus. $K_{\hat{q}}$ et V sont respectivement une matrice de gains et de pondération à déterminer.

Si l'on désigne par q le mode du SLC et par \hat{q} le mode de l'observateur, la dynamique de l'erreur d'estimation $e = x - \hat{x}$ et du résidu r sont données par :

$$\dot{e} = (A_{\hat{q}} - K_{\hat{q}}C)e + (A_q - A_{\hat{q}})x + (B_{d_q} - K_{\hat{q}}D_{d_q})d + (B_{f_q} - K_{\hat{q}}D_{f_q})f \quad (7)$$

$$r = V(y - \hat{y}) = V(Cx + D_{d_q}d + D_{f_q}f - C\hat{x}) \quad (8)$$

On peut remarquer que la dynamique du résidu ne dépend pas seulement de f et d mais également de x . Ainsi, le problème de la robustesse de la détection de défauts revient à déterminer les matrices $K_{\hat{q}}$ et V en assurant la convergence de l'erreur d'estimation. Par ailleurs, la présence des sauts d'états aux instants de commutation nécessite l'actualisation de l'état aux instants de commutations (voir [14], [10] pour plus détails). Enfin, le résidu généré conjointement

être sensible aux défauts f et robuste aux entrées inconnues d .

La dynamique du résidu peut être formulée de la façon suivante :

$$r(s) = r_x(s) + r_d(s) + r_f(s) \quad (9)$$

$$r(s) = VG_x(s)x(s) + VG_d(s)d(s) + VG_f(s)f(s) \quad (10)$$

où $G_x(s)$, $G_d(s)$ et $G_f(s)$ sont des fonctions de transfert définies par :

$$r_x(s) = VC \left(\underbrace{(sI - \bar{A}_{\hat{q}}) \Delta A_{q,\hat{q}}^{-1} x(s)}_{e_x} \right) \quad (11)$$

$$r_d(s) = V \left(C(sI - \bar{A}_{\hat{q}})^{-1} \bar{B}_{d_q} + D_{d_q} \right) d(s) \quad (12)$$

$$r_f(s) = V \left(C(sI - \bar{A}_{\hat{q}})^{-1} \bar{B}_{f_q} + D_{f_q} \right) f(s) \quad (13)$$

avec : $\bar{A}_{\hat{q}} = A_{\hat{q}} - K_{\hat{q}}C$, $\bar{B}_{d_q} = B_{d_q} - K_{\hat{q}}D_{d_q}$, $\bar{B}_{f_q} = B_{f_q} - K_{\hat{q}}D_{f_q}$, $\Delta A_{q,\hat{q}} = A_q - A_{\hat{q}}$.

Afin d'assurer la robustesse du résidu, on peut utiliser les indices de performance H_∞ et H_- . En fait, la performance H_∞ est utilisée pour atténuer les effets de perturbations ainsi que les effets d'entrées inconnues :

$$H_\infty = \|VG_d\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(VG_d(j\omega)) \quad (14)$$

D'autre part, l'indice H_- est utilisé comme un seuil de sensibilité du générateur de résidus aux défauts de SDH.

$$H_- = \inf_{\omega} \underline{\sigma}(VG_f(j\omega)) \quad (15)$$

où $\bar{\sigma}(\cdot)$ et $\underline{\sigma}(\cdot)$ désignent respectivement la valeur singulière supérieure de la matrice de transfert VG_d et la valeur singulière inférieure de la matrice de transfert VG_f .

Globalement, notre objectif dans ce travail se résume à déterminer les matrices de gains $K_{\hat{q}}$ et la matrice de filtre postérieur V de façon que l'erreur d'estimation soit bornée et les conditions (16) et (17) soient aussi vérifiées pour les scalaires $\beta_{\hat{q}} > 0$ et $\gamma_{\hat{q}} > 0$:

$$H_\infty \leq \gamma_{\hat{q}} \quad (16)$$

$$H_- \geq \beta_{\hat{q}} \quad (17)$$

3.1. Synthèse de l'observateur

En exploitant la structure de la dynamique du résidu, qui consiste en une somme de trois composantes additives, chaque terme de la relation (9) peut être examiné séparément.

En ce qui concerne la composante e_x , donnée par la relation (11), nous proposons d'exploiter les résultats de la référence [14]. L'idée consiste donc à borner cette composante en considérant, bien entendu, sa dépendance de la variable d'état

et surtout la présence des sauts d'états aux moments de commutations.

Ainsi, on introduisant la fonction multiple de Lyapunov (18), la dérivée de cette dernière sera donnée par (19):

$$V_{\hat{q}}(e_x) = e_x^T P_{\hat{q}} e_x, \quad \hat{q} \in I_N \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\hat{q}}(e_x) = e_x^T & \left([A_{\hat{q}} - K_{\hat{q}} C]^T P_{\hat{q}} + P_{\hat{q}} [A_{\hat{q}} - K_{\hat{q}} C] \right) e_x \\ & + e_x^T P_{\hat{q}} \Delta A_{q,\hat{q}} x + x^T \Delta A_{q,\hat{q}}^T P_{\hat{q}} e_x \end{aligned} \quad (19)$$

où $P_{\hat{q}} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ sont des matrices symétriques définies positives.

Finalement, sous l'hypothèse de la bornitude de l'état x du SLC (1)-(2) par une valeur x_{\max} pour $t > T_0 > 0$, les gains de l'observateur peuvent être déterminés selon le théorème suivant :

Théorème 1 [14] : Considérons le SLC donné par le système (1) et (2) avec l'observateur (4)-(6), l'erreur d'estimation (11) est bornée pour les scalaires $\varepsilon \geq 0, \alpha > 0, \mu_{i,j} \geq 0$ et ,

$v_{i,j} \geq 0$ par $\sqrt{\frac{\bar{v}}{1+\bar{v}}} \sqrt{\frac{\xi}{\alpha}} \varepsilon x_{\max}$, (\bar{v} est le sup de $v_{\hat{q},q}, (\hat{q}, q) \in I_s$), s'il existe des matrices singulières $P_{\hat{q}} > 0, H_{\hat{q}}$ et V tel que les LMI suivantes sont vérifiées :

$$1. \quad \alpha I \leq P_{\hat{q}} \leq \xi I \quad \hat{q} \in I_N \quad (20)$$

$$2. \quad \Gamma_{\hat{q},q} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\hat{q},q}^{11} & \Gamma_{\hat{q},q}^{12} \\ * & \Gamma_{\hat{q},q}^{22} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\hat{q}, q) \in I_s \quad (21)$$

$$3. \quad P_{\hat{q}} = P_{\hat{q}} + d_{\hat{q},q}^T C + C^T d_{\hat{q},q} \quad (\hat{q}, q) \in I_s \quad (22)$$

où

$$\Gamma_{\hat{q},q}^{11} = A_{\hat{q}}^T P_{\hat{q}} - C H_{\hat{q}}^T + P_{\hat{q}} A_{\hat{q}} - H_{\hat{q}} C + I + v_{\hat{q},q} I$$

$$\Gamma_{\hat{q},q}^{12} = P_{\hat{q}} (A_q - A_{\hat{q}}), \quad \Gamma_{\hat{q},q}^{22} = \mu_{\hat{q},q} Q_q - \varepsilon^2 v_{\hat{q},q} I.$$

(*) indique le transposé de l'élément $\Gamma_{\hat{q},q}^{12}$.

et $\forall \hat{x} \in S_{\hat{q},q}$ l'état de l'observateur hybride est actualisé

$$\text{selon : } \hat{x}^+ = \left(I - R_{\hat{q}}^{-1} (C R_{\hat{q}}^{-1})^\dagger C \right) \hat{x} + R_{\hat{q}}^{-1} (C R_{\hat{q}}^{-1})^\dagger y \quad (23)$$

Où $(R)^\dagger$ est le pseudo-inverse de R , \bar{v} est le sup de $v_{\hat{q},q}, (\hat{q}, q) \in I_s$ et $R_{\hat{q}} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive.

On note que, la formulation de l'inégalité (21) sous forme d'une LMI est faite, en introduisant une nouvelle variable $H_{\hat{q}} \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ selon le changement de variables suivant $P_{\hat{q}} = H_{\hat{q}} K_{\hat{q}}^{-1}$. Ce qui nous permet d'introduire une autre contrainte dont l'objectif est de restreindre le domaine de faisabilité des LMI afin de contrôler la dynamique de l'observateur.

$$\begin{bmatrix} \lambda_{\hat{q}}^2 I_{p \times p} & * \\ H_{\hat{q}} & I_{n \times n} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \hat{q} \in I_N \quad (24)$$

Pour plus de détails concernant la preuve de ce théorème, le lecteur peut se référer aux travaux de S. Pettersson [14] et les références citées dans son article.

3.2. Robustesse de l'observateur

Dans cette section, on formule le problème de la synthèse de l'observateur robuste comme étant un problème d'optimisation, puis, on le résoudra en exploitant les résultats de la commande robuste.

Lemme 1 : Considérons le système linéaire à commutations (1) et (2) avec l'observateur (4)-(6). Le système (12) est asymptotiquement stable et satisfait la condition (16) s'il existe des matrices singulières $P_{\hat{q}} > 0, H_{\hat{q}}$ et V tel que la LMI suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} A_{\hat{q}}^T P_{\hat{q}} + P_{\hat{q}} A_{\hat{q}} - H_{\hat{q}} C - C^T H_{\hat{q}}^T & P_{\hat{q}} B_{d_q} - H_{\hat{q}} D_{d_q} & C^T V^T \\ * & -\gamma_{\hat{q}}^2 I & D_{d_q}^T V^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (25)$$

Preuve : D'après les dynamiques (7) et (8), les relations suivantes sont déduites :

$$\dot{e}_d = \bar{A}_{\hat{q}} e_d + \bar{B}_{\hat{q}} d \quad \text{et} \quad r_d = V C e_d + V D_{d_q} d.$$

Donc,

$$H_{\infty} \leq \gamma_{\hat{q}} \Leftrightarrow \int_0^t r_d^T r_d d\tau \leq \gamma_{\hat{q}}^2 \int_0^t (d^T d) d\tau.$$

$$J = \int_0^t (r_d^T r_d) d\tau - \gamma_{\hat{q}}^2 \int_0^t (d^T d) d\tau = \int_0^t (r_d^T r_d - \gamma_{\hat{q}}^2 d^T d) d\tau$$

En introduisant une fonction multiple de Lyapunov candidate $V(e_d) = e_d^T P_{\hat{q}} e_d \geq 0, P_{\hat{q}} > 0$. D'où, J devient:

$$J = \int_0^t \left(r_d^T r_d - \gamma_{\hat{q}}^2 d^T d + \frac{dV(e_d)}{d\tau} \right) d\tau - V(e_d)$$

$$J = \int_0^t \left[e_d^T \quad d^T \right] \underbrace{\begin{bmatrix} C^T V^T \\ D_{d_q}^T V^T \end{bmatrix} \left[V C \quad V D_{d_q} \right] + E_d}_{R_d} \begin{bmatrix} e_d \\ d \end{bmatrix} d\tau - V(e_d)$$

où $E_d = \begin{bmatrix} \bar{A}_{\hat{q}}^T P_{\hat{q}} + P_{\hat{q}} \bar{A}_{\hat{q}} & P_{\hat{q}} \bar{B}_{\hat{q}} \\ * & -\gamma_{\hat{q}}^2 I \end{bmatrix}$. D'où, $J \leq 0$, si $R_d \leq 0$. En

utilisant le complément de Schur, la matrice R_d devient :

$$R_d = \begin{bmatrix} \bar{A}_{\hat{q}}^T P_{\hat{q}} + P_{\hat{q}} \bar{A}_{\hat{q}} & P_{\hat{q}} \bar{B}_{\hat{q}} & C^T V^T \\ * & -\gamma_{\hat{q}}^2 I & D_{d_q}^T V^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} \leq 0$$

Finalement, puisque $\bar{A}_{\hat{q}} = A_{\hat{q}} - K_{\hat{q}} C$ et $\bar{B}_{\hat{q}} = B_{d_q} - K_{\hat{q}} D_{d_q}$, l'inégalité (25) peut être déduite directement à partir de la dernière inégalité R_d . ■

Lemme 2 : Considérons le système linéaire à commutations (1) et (2) avec l'observateur (4)-(6), le système (13) est asymptotiquement stable et satisfait la condition (17) s'il existe des matrices singulières $P_{\hat{q}} > 0$, $H_{\hat{q}}$ et V tel que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} \\ * & \Upsilon_{22} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (26)$$

où :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11} &= A_{\hat{q}}^T P_{\hat{q}} + P_{\hat{q}} A_{\hat{q}} - H_{\hat{q}} C - C^T H_{\hat{q}}^T - C^T V^T V C, \\ \Upsilon_{12} &= C^T V^T V D_{f_{\hat{q}}} + H_{\hat{q}} D_{f_{\hat{q}}} - P_{\hat{q}} B_{f_{\hat{q}}}, \quad \Upsilon_{22} = \beta_{\hat{q}}^2 I - D_{f_{\hat{q}}}^T V^T V D_{f_{\hat{q}}}. \end{aligned}$$

Preuve : D'après les dynamiques (7) et (8), les relations suivantes sont déduites :

$$\dot{e}_f = \bar{A}_{\hat{q}} e_f + \bar{B}_{f_{\hat{q}}} f \text{ et } r_f = V C e_f + V D_{f_{\hat{q}}} f$$

Donc,

$$H_- \geq \beta_{\hat{q}} \Leftrightarrow \int_0^t r_f^T r_f d\tau \geq \beta_{\hat{q}}^2 \int_0^t f^T f d\tau.$$

$$J = \int_0^t (r_f^T r_f) d\tau - \beta_{\hat{q}}^2 \int_0^t (f^T f) d\tau = \int_0^t (r_f^T r_f - \beta_{\hat{q}}^2 f^T f) d\tau$$

En introduisant une fonction multiple de Lyapunov candidate

$$V(e_f) = e_f^T P_{\hat{q}} e_f \geq 0, P_{\hat{q}} > 0. \text{ D'où, } J \text{ devient:}$$

$$J = \int_0^t \left(r_f^T r_f - \beta_{\hat{q}}^2 f^T f - \frac{dV(e_f)}{d\tau} \right) d\tau + V(e_f)$$

$$J = \int_0^t \begin{bmatrix} e_f^T & f^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T V^T \\ D_{f_{\hat{q}}}^T V^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V C & V D_{f_{\hat{q}}} \end{bmatrix} - E_f \begin{bmatrix} e_f \\ f \end{bmatrix} d\tau + V(e_f)$$

$$\text{où } E_f = \begin{bmatrix} \bar{A}_{\hat{q}}^T P_{\hat{q}} + P_{\hat{q}} \bar{A}_{\hat{q}} & P_{\hat{q}} \bar{B}_{f_{\hat{q}}} \\ * & \beta_{\hat{q}}^2 I \end{bmatrix}$$

$$\text{D'où, si } \begin{bmatrix} C^T V^T V C - \bar{A}_{\hat{q}}^T P_{\hat{q}} - P_{\hat{q}} \bar{A}_{\hat{q}} & C^T V^T V D_{f_{\hat{q}}} - P_{\hat{q}} \bar{B}_{f_{\hat{q}}} \\ * & D_{f_{\hat{q}}}^T V^T V D_{f_{\hat{q}}} - \beta_{\hat{q}}^2 I \end{bmatrix} \geq 0$$

On peut donc obtenir $J \geq 0$.

Finalement, puisque $\bar{A}_{\hat{q}} = A_{\hat{q}} - K_{\hat{q}} C$ et $\bar{B}_{f_{\hat{q}}} = B_{f_{\hat{q}}} - K_{\hat{q}} D_{f_{\hat{q}}}$, l'inégalité (26) peut être déduite directement à partir de la dernière inégalité. ■

Malheureusement, l'inégalité (26) est très conservative, vu la présence du terme quadratique $V^T V$, et ne peut être résolue à l'aide de LMI ToolBox du Matlab. C'est pour ces raisons que l'on propose le théorème suivant afin de contourner ce problème de conservatisme.

Théorème 2 : Considérons SLC (1) et (2) avec l'observateur (4)-(6), le système (13) est asymptotiquement stable et satisfait la condition (17) s'il existe des matrices singulières $P_{\hat{q}} > 0$, $H_{\hat{q}}$ et V tel que la LMI suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} \text{Ter1} + 2\varphi_1(V, V_c^n) & H_{\hat{q}} D_{f_{\hat{q}}} - P_{\hat{q}} B_{f_{\hat{q}}} & C^T V^T \\ * & \beta_{\hat{q}}^2 I + 2\varphi_2(V, V_f^n) & D_{f_{\hat{q}}}^T V^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (27)$$

où:

$$V_c^n = V^{n-1} C, \quad V_f^n = V^{n-1} F_{f_{\hat{q}}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Ter1} = A_{\hat{q}}^T P_{\hat{q}} + P_{\hat{q}} A_{\hat{q}} - H_{\hat{q}} C - C^T H_{\hat{q}}^T,$$

$$\varphi_1(V, V_c^n) = (V_c^n)^T V_c^n - (V_c^n)^T V C - C^T V^T V_c^n,$$

$\varphi_2(V, V_f^n) = (V_f^n)^T V_f^n - (V_f^n)^T V D_{f_{\hat{q}}} - D_{f_{\hat{q}}}^T V^T V_f^n$ et $F_{f_{\hat{q}}}$ sont des matrices de pondération.

Preuve : D'après le lemme 2

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ * & \Xi_{22} \end{bmatrix} \leq 0$$

avec

$$\text{Ter1} = A_{\hat{q}}^T P_{\hat{q}} + P_{\hat{q}} A_{\hat{q}} - H_{\hat{q}} C - C^T H_{\hat{q}}^T, \quad \text{Ter2} = H_{\hat{q}} D_{f_{\hat{q}}} - P_{\hat{q}} B_{f_{\hat{q}}},$$

$$\Xi_{11} = \text{Ter1} - C^T V^T V C,$$

$$\Xi_{12} = C^T V^T V D_{f_{\hat{q}}} + \text{Ter2},$$

$$\Xi_{22} = \beta_{\hat{q}}^2 I - D_{f_{\hat{q}}}^T V^T V D_{f_{\hat{q}}} + 2D_{f_{\hat{q}}}^T V^T V D_{f_{\hat{q}}} - 2D_{f_{\hat{q}}}^T V^T V D_{f_{\hat{q}}}.$$

Donc,

$$\left(\begin{bmatrix} \text{Ter1} - 2C^T V^T V C & \text{Ter2} \\ * & \beta_{\hat{q}}^2 I - 2D_{f_{\hat{q}}}^T V^T V D_{f_{\hat{q}}} \end{bmatrix} + \Lambda_f \right) \leq 0 \quad (28)$$

avec

$$\Lambda_f = \begin{bmatrix} C^T V^T V C & C^T V^T V D_{f_{\hat{q}}} \\ * & D_{f_{\hat{q}}}^T V^T V D_{f_{\hat{q}}} \end{bmatrix}$$

En utilisant le complément de Shur [15], la LMI (28) peut être formulée sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \text{Ter1} - 2C^T V^T V C & H_{\hat{q}} D_{f_{\hat{q}}} - P_{\hat{q}} B_{f_{\hat{q}}} & C^T V^T \\ * & \beta_{\hat{q}}^2 I - 2D_{f_{\hat{q}}}^T V^T V D_{f_{\hat{q}}} & D_{f_{\hat{q}}}^T V^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} \leq 0$$

En introduisant le changement de variables suivant, $\varphi_1(V, V_c^n) = -C^T V^T V C$ et $\varphi_2(V, V_f^n) = -D_{f_{\hat{q}}}^T V^T V D_{f_{\hat{q}}}$, on peut trouver l'inégalité (27). ■

Les résultats précédents nous permettent maintenant d'énoncer le théorème 3

Théorème 3 : Considérons SLC (1) et (2) avec l'observateur (4)-(6), les systèmes (7) et (8) sont bornés et satisfont les conditions (16) et (17), si :

1. Il existe des matrices $P_{\hat{q}} > 0$, $H_{\hat{q}}$ et V tels que les LMIs (20), (21), (22), (24), (25) et (27) sont vérifiés

2. L'état estimé est actualisé selon (23).

Preuve : D'après les caractéristiques algébriques de la somme, chaque composante de la dynamique de résidus, donnée par (9), peut être traitée séparément. Ainsi :

1- Selon le théorème 1 (LMIs (20), (21), (22) et (24)), la première composante du résidu (implicitement, de l'erreur d'estimation) est bornée.

2- Selon le lemme 1 (LMI (25)), la seconde composante du résidu (implicitement, de l'erreur d'estimation) est asymptotiquement stable et satisfait la condition (16).

3- Selon le théorème 2 (LMI (27)), la troisième composante du résidu (implicitement, de l'erreur d'estimation) est asymptotiquement stable et satisfait la condition (17).

Finalement, en combinant les trois points 1, 2 et 3, on peut prouver facilement le théorème 3. ■

A ce stade de l'étude, nous avons formulé les conditions de convergence de l'observateur proposé, mais nous n'avons pas encore optimisé ses performances afin de garantir un bon compromis entre la robustesse et la sensibilité du DID. C'est pourquoi nous introduisons l'indice de performance suivant :

$Indice_Perf = \inf_{\omega} \frac{\gamma_{\hat{q}}}{\beta_{\hat{q}}}$ et nous proposons une procédure itérative permettant de l'optimiser.

Corollaire 1: Les valeurs de $P_{\hat{q}} > 0$, $H_{\hat{q}}$ et V satisfaisant le théorème 2 et minimisant le critère $Indice_Perf = \inf_{\omega} \frac{\gamma_{\hat{q}}}{\beta_{\hat{q}}}$, peuvent être obtenus en utilisant la procédure itérative suivante.

1. Initialiser $\gamma_{\hat{q}}$ et $\beta_{\hat{q}}$.
2. Résoudre les LMIs (20), (21), (22), (24) et (25) afin de trouver une solution faisable pour les matrices $P_{\hat{q}}$, $H_{\hat{q}}$ et V .
3. Si les LMIs (20), (21), (22), (24) et (25) ne sont pas faisables, prendre d'autres valeurs pour $\gamma_{\hat{q}}$ et $\beta_{\hat{q}}$, et refaire l'étape jusqu'à ce qu'une solution soit trouvée.
4. Calculer $V^{n-1} = V$, $V_c^n = V^{n-1}C$, $V_f^n = V^{n-1}F_{f_{\hat{q}}}$ et substituer $P_{\hat{q}}$ par sa valeur trouvée à l'étape 2 dans les LMIs (20), (21), (22), (24), (25) et (27) afin de trouver, une autre solution faisable pour $H_{\hat{q}}$ et V (i.e., dans cette étape, le terme $P_{\hat{q}}$ n'est plus une matrice variable).
5. Décrémenter $\gamma_{\hat{q}}$ et incrémenter $\beta_{\hat{q}}$ et répéter l'étape 4 jusqu'à ce qu'aucune solution faisable ne soit plus obtenue.
6. Récupérer les dernières valeurs de $H_{\hat{q}}$ et V .

3.3. Détection de défauts : Parmi les méthodes largement utilisées pour la détection de défauts, on a opté pour celles qui se basent sur l'utilisation d'un seuil $J_{th} > 0$ de détection. La logique de détection considérée dans ce travail est donnée par :

$$\|r\|_{2,T} > J_{th} \quad (29)$$

$$\|r\|_{2,T} \leq J_{th} \quad (30)$$

où $\|r\|_{2,T}$ est déterminée :

$$\|r\|_{2,T} = \left[\int_{t_1}^{t_2} r(t)^T r(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} = \|r_d(t) + r_f(t)\|_{2,T}, \quad T = t_2 - t_1$$

$r_d(t)$ et $r_f(t)$ sont définies comme : $r_d(t) = r(t)|_{f=0}$, $r_f(t) = r(t)|_{d=0}$. Anisi, on peut choisir $J_{th} = J_{th,d} = \sup_{d \in L_2} \|r_d(t)\|_{2,T}$ comme un seuil de détection.

IV. SIMULATION ET RESULTATS

On considère, dans cet exemple, le système à commutations à deux modes défini comme suit :

- Mode 1 : si $S_1 = 0$: $A_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ -2 & -0.5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$C = [1 \quad -2.4]$, $B_{d_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B_{f_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $D_{d_1} = [1 \quad 0]$,

$D_{f_1} = 14.72$.

- Mode 2 : si $S_2 = 0$: $A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$C = [1 \quad -2.4]$, $B_{d_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_{f_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $D_{d_2} = [1 \quad 0]$,

$D_{f_2} = 0$.

où $S_i = a_i x_1 + b_i x_2$, $i \in \{1, 2\}$ sont les lois de commutations avec $a_1 = 0.25$, $b_1 = 1$, $a_2 = 1$ et $b_2 = 1$.

On note que le premier sous-système est instable, par contre, le deuxième est stable. Cependant, le SLC, constitué de ces deux sous-systèmes, est stable comme le montre la figure 1.

L'application du corollaire 1, permet de trouver le résultat suivant : $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.9667$, $\beta_1 = 3.4831$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$, et

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3.5616 \\ -0.8557 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -0.0434 \\ 0.0545 \end{bmatrix} \text{ et } V = 0.3330.$$

Avec $\xi = 4.9$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 6.78$, $\gamma_{1_{\text{mit}}} = \gamma_{2_{\text{mit}}} = 4$ et $\beta_{1_{\text{mit}}} = 0$.

Afin de montrer l'efficacité de l'approche proposée, les entrées inconnues d sont considérées comme un bruit blanc gaussien centré d'une amplitude de 0.2 (Temps d'échantillonnage 0.01s). Le défaut f est simulé comme une impulsion, d'une amplitude de 0.05, qui se produit en mode 2, entre l'instant 5.2s et 5.4s. Le résidu généré est illustré par la figure 2, qui montre que le résidu converge vers zéro à l'instant 2s, ensuite, il s'éloigne notablement de zéro à la suite de l'apparition de défauts.

En plus, la figure 3 illustre l'évolution de la fonction $\|r\|_{2,T}$ avec et sans la présence de défauts. Deux courbes sont illustrées sur la figure 3. On peut remarquer que les deux courbes se différencient progressivement dès l'apparition du défaut. Finalement, dans le but de mettre en exergue l'efficacité de l'approche développée, on trace sur la figure 4, le résidu généré à l'aide de l'observateur synthétisé dans [14]. En examinant les deux figures 2 et 4, on constate globalement

que le bruit est fortement atténué en utilisant l'approche proposée dans ce travail.

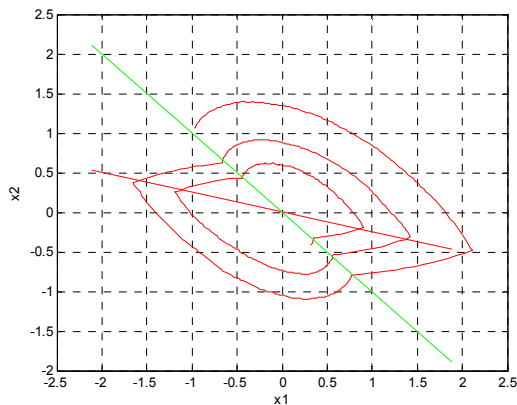


Fig. 1. Plan de phase.

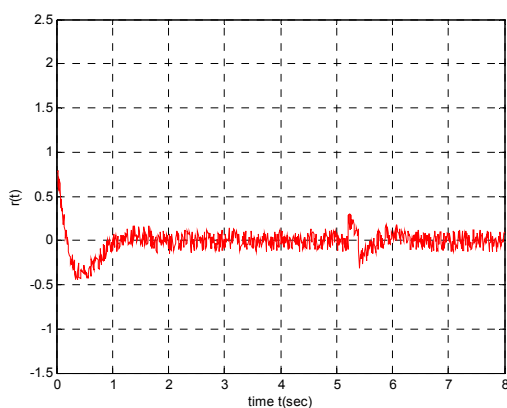


Fig. 2. Résidu généré par RFDO.

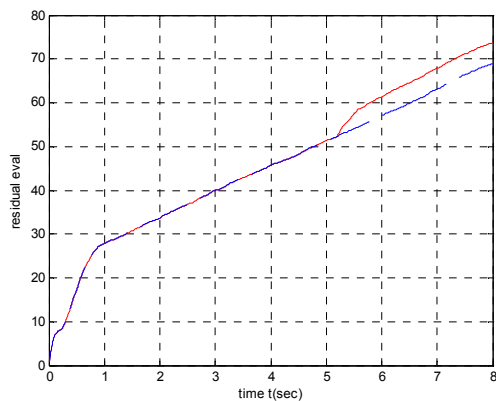


Fig. 3. Évolution de la fonction $\|r\|_{2,T}$.

IV. CONCLUSION

Dans cet article, un observateur hybride robuste est synthétisé pour une classe de système linéaire à commutations. Cet observateur a pour vocation essentielle de détecter les défauts d'un SLC soumis aux effets nuisibles de perturbations et/ou d'erreurs de modélisation. L'approche proposée est basée sur l'utilisation de résultats développés en matière de commande robuste. Finalement, un exemple numérique proposé, illustre clairement l'efficacité de l'approche développée dans ce travail.

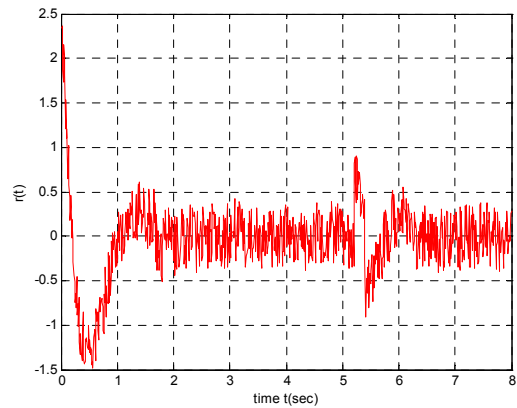


Fig. 4. Résidu généré par l'observateur.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient la Région Champagne-Ardenne, dans le cadre du projet CPER MOSYP ainsi que le GIS-3SGS dans le cadre du projet COSMOS 2 pour leur soutien financier.

RÉFÉRENCES

- [1] DeCarlo, R., Branicky, M., Pettersson, S and Lennartson, B.,(2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceeding of the IEEE*, vol 88, no. 7, pp. 1069-1082.
- [2] Antsaklis, P.J., *Proceedings of the IEEE, Special Issue on Hybrid Systems: Theory and Applications*, 43(2), 2000 .
- [3] Olivier-Maget N, Hétreux Gilles, Le Lann J.M, Le Lann M. V. Model-based fault diagnosis for hybrid systems: Application on chemical process. *Computers and Chemical Engineering* 33.(2009) 1617-1630.
- [4] Frank P.M, Ding X. Survey of robust residual generation and evolution methods in observer-based detection systems. *Journal of Process Control*, 7(6):403-424, December 1997. ISSN 0959-1524.
- [5] Klein, M., Nielsn, L. Evaluating some Gain Scheduling Strategies in Diagnosis of a Tank, in *Proc. IFAC Fault Detection, Supervision and Safety for Technical processes*. Budapest, Hungary, 2000.
- [6] Frisk, E. Residual generator design for nonlinear, polynomial systems: a Gröbner basis approach, In *Proc. IFAC Fault Detection, supervision and Safety for Technical Processes*, Budapest, Hungary, 2000.
- [7] Kratz, F., Aubry, D.. Finite memory observer for state estimation of hybrid systems. *Proc. of IFAC Safeprocess '03*. Washington D.C, 2003.
- [8] Cocquempot V., El Mezzyani T., Staroswiecki M., *Fault Detection and Isolation for Hybrid Systems using Structured Parity Residuals*, ASSC'2004, Melbourne, Australie, 2004.
- [9] Messai, N., Thomas, P., Lefebvre, D., Riera, B. Fault detection for HDS by means of neural networks : application to two tanks hydraulic system. *6thIFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*. Beijing, China, 2006.
- [10] Saadaoui, H., De Leon, J., Djemai, M., Manamanni, N., and Barbot, J-P.. High order sliding mode and adaptive observers for class of switched systems with unknown parameters : A comparative study. *45th IEEE CDC*. San Diego, CA, USA, 2006.
- [11] Zhong, M. X. Ding, S. Lam, J. and Wang, H. A LMI approach robust fault detection filter for uncertain LTI systems. *Automatica* 39, p543-550, 2003.
- [12] Guo, J. Huang, X. and Cui, Y. Design and analysis of robust fault detection filter using LMI tools. *Computers and Mathematics with applications*, doi:10.1016/j.camwa, 2008.
- [13] Belkhiat, D.E.C, Messai, N and Manamanni, N. Robust Fault Detection Based-Observer for Linear Switched Systems. *3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS 09)*. Zaragoza, Spain, 2009.
- [14] Pettersson, S. Switched state jump observers for switched system. *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*. Pargue, Czech Republic, 2005.
- [15] Boyd S., El Ghaoui L., Féron E.; Balakrishnan V., 1994, *Linear matrix inequality in system and control theory*. Studies in Applied Mathematics; Philadelphia